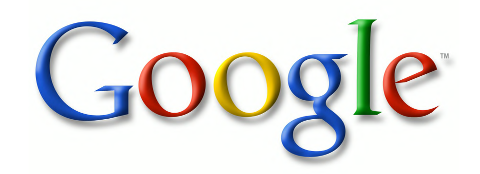


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

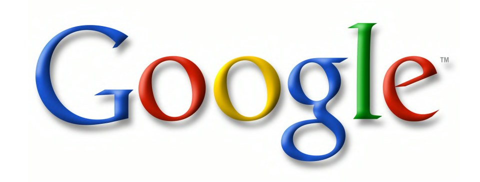
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


B 461635
DUPL


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



ENGINEERING
LIBRARY
GB
1003
.M22

MÉCANIQUE ET PHYSIQUE DU GLOBE

ESSAIS

D'HYDRAULIQUE

SOUTERRAINE & FLUVIALE

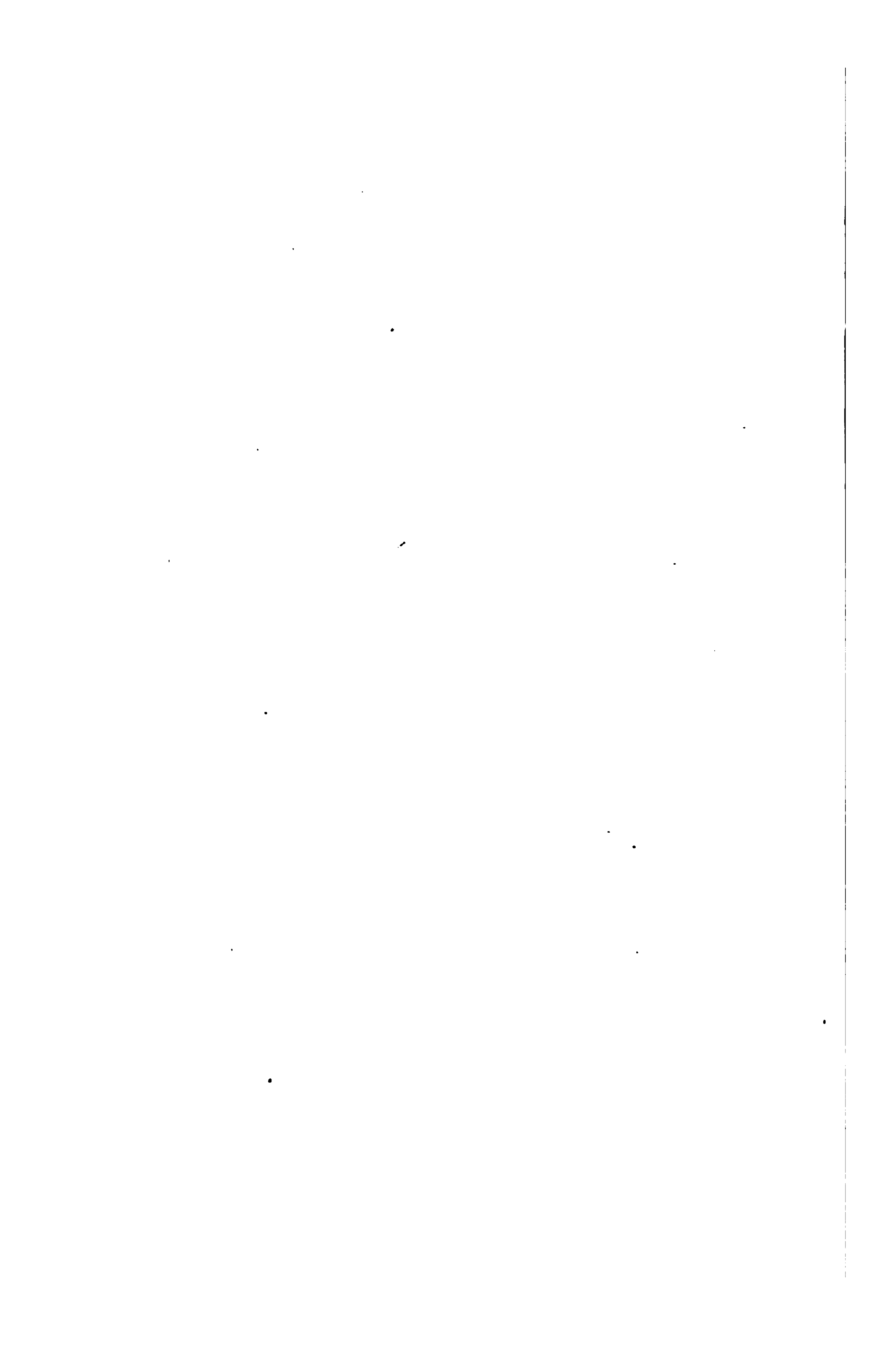
PAR

EDMOND MAILLET

INGÉNIEUR DES PONTS-ET-CHAUSSÉES
ATTACHÉ AU SERVICE HYDROMÉTRIQUE DU BASSIN DE LA SEINE
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
6 ET 12, RUE DE LA SORBONNE, 6 ET 12

1905



MÉCANIQUE ET PHYSIQUE DU GLOBE

ESSAIS D'HYDRAULIQUE

SOUTERRAINE & FLUVIALE

ingénieurs, à tous ceux qu'intéressent les mouvements et la répartition des eaux météoriques au-dessus, à la surface ou dans le sous-sol des continents. Nous espérons en particulier que les méthodes pratiques que nous y exposons, seront susceptibles d'applications nombreuses et variées.

ESSAIS D'HYDRAULIQUE
SOUTERRAINE ET FLUVIALE

PREMIÈRE PARTIE

—

PARTIE THÉORIQUE

CHAPITRE PREMIER

—

INTRODUCTION
DE LA PREMIÈRE RÉDACTION
(8 mai 1903)

Nous nous proposons ici d'étudier, soit au point de vue théorique, soit au point de vue pratique, les variations du débit des sources, et aussi des bas débits des rivières, de façon à permettre d'arriver à prévoir à l'avance ce débit, absolument comme on le fait pour les niveaux des crues des rivières. Nous ne résoudrons pas ici, bien entendu, tous les cas, mais les résultats que nous obtiendrons seront, croyons-nous, souvent applicables.

Diverses études, et, même, des prévisions ont déjà été faites à cet égard. Au point de vue théorique nous mentionnerons les travaux de Dupuit (1), Thévenet (2), Clavenad et Bussy (3), Fossa-

(1) *Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, etc.*, 2e édition, Paris, Dunod, 1863.

(2) *Ann. des Ponts-et-Chaussées*, 1884, 1er semestre, p. 200.

(3) id., 1890, 1er semestre, p. 265.

Mancini [1], au point de vue pratique, les prévisions de Belgrand, G. Lemoine, de Préaudeau, Babinet, Meurdra [2], etc. Nous-mêmes avons indiqué [3] récemment un moyen de prévoir quantitativement les débits minima annuels de deux des sources de la Vanne, « Cérilly » et « Armentières et Drains ».

La plupart des auteurs se sont bornés, soit à des considérations théoriques, soit à des vérifications générales de ces considérations, soit encore à des prévisions qualitatives : Belgrand, G. Lemoine, de Préaudeau, Babinet, ont pu, à diverses reprises, annoncer des débits exceptionnellement bas pour les sources dans le bassin de la Seine ; Raulin a fait des prévisions de même nature pour la Garonne ; Meurdra [4], pour des sources qui alimentent la ville du Havre, a pu faire des prévisions plus précises, mais, semble-t-il, qualitatives ; toutefois il n'indique pas avec assez de détails les bases sur lesquelles il s'appuie : autrement dit son mémoire n'est pas assez développé. Celui-ci est à peu près exclusivement conçu au point de vue expérimental, et ce qu'il contient ne permet pas de faire de nouvelles prévisions.

Nous sommes, croyons-nous, le premier à avoir indiqué une méthode pour faire, systématiquement, des prévisions quantitatives précises ; un graphique basé sur la loi de Dausse relative aux terrains perméables du bassin de la Seine nous a permis de prévoir plusieurs mois à l'avance le chiffre des débits minima annuels des deux sources précitées de la Vanne. Les résultats donnés par ce graphique manquent toutefois d'exactitude dans quelques années exceptionnelles.

Depuis, nous avons cherché à voir si des considérations théoriques ne pourraient nous indiquer un moyen de prévoir, non plus les débits minima, mais la marche du débit, en partant d'hypothèses plus ou moins voisines de celles faites par Dupuit et

(1) id., 1890, 1er semestre, p. 823 et 1893, 2e sem., p. 848.

(2) id., juin 1870, 1893, 1895 ; C. R., 1874, 1875 ; *Ann. Soc. Météor. de France*, 1901 et 1902, etc.

(3) C. R., mai 1902 ; *Anna. Soc. Météor.*, juin 1902 ; *Ann. des Ponts-et-Chaussées*, 1902, 2e sem., p. 208 On trouvera en outre de nombreux renseignements bibliographiques relatifs à l'hydrologie dans le *Manuel hydrologique du bassin de la Seine*, Paris, Imprimerie nationale, 1884.

(4) *Mém. Assoc. franç.*, Congrès du Havre, 1877, Sources du Havre. Comp. encore Fantoli, *Sul regime idraulico dei laghi*, Milan, 1897.

l'ingénieur Fossa-Mancini, et nous avons été assez heureux pour trouver par le calcul, grâce à l'hypothèse d'un mouvement quasi-permanent [1], une loi dont les principes essentiels se sont trouvés vérifiés par l'expérience.

En même temps, nous avons cherché (p. 28 et suiv.) à justifier par la théorie notre premier graphique déjà publié. Le développement des idées précédentes est renfermé dans la première moitié de la partie théorique de notre mémoire; il est basé sur certaines hypothèses dont nous avons cherché à nous passer dans la deuxième moitié.

Dans celle-ci nous avons étudié la stabilité du mouvement de la nappe ou de la nature de ce mouvement dans diverses suppositions, en tenant compte des apports que la pluie procure à la nappe. Nous avons étudié aussi le mouvement en partant d'équations plus rigoureuses que précédemment et nous inspirant des résultats anciens de M. Boussinesq [2] sur la question, et en tenant compte de la courbure du fond imperméable sur lequel repose la nappe. Admettant pour l'équation de ce fond certaines formes plus ou moins simples, nous montrons que, dans des cas très étendus, la nature de la crue occasionnée par des pluies dépend essentiellement de cette courbure : si ce fond est convexe vers le ciel, le maximum se produira rapidement (exemple, sources de la Vanne); si ce fond est concave, la crue sera lente (exemple, sources du Havre). L'influence d'une partie de la nappe sur le maximum sera d'autant plus forte que sa pente de fond est plus forte. Dans des cas étendus, en particulier dans celui où le fond est horizontal et à peu près au niveau de la source, les mouvements sont stables, ou, au moins, beaucoup de perturbations n'en altèrent pas la stabilité.

Nous étudions encore d'une façon aussi générale que possible les relations qui unissent les bas niveaux N ou débits (et d'autres phénomènes qui s'y rattachent) pour un point d'un cours d'eau ou pour une source, et les pluies. Nous montrons que, dans la pratique, on pourra souvent considérer N, par exemple, comme fonction des totaux de pluies des saisons chaudes et froides précédentes.

(1) Cette expression est vicieuse; il eût fallu dire : « grâce à l'hypothèse d'une forme particulière de la surface libre »; c'est, en fait, la seule hypothèse dont nous nous servons dans nos calculs. Comparer plus loin, p. 37.

(2) *Essai sur la théorie des eaux courantes*, p. 1 et 252.

Sauf pour des saisons chaudes très pluvieuses et l'intervention des terrains imperméables, N n'éprouvera, surtout si le bassin est assez étendu, que des variations très lentes d'une année à l'autre.

Tels sont, au point de vue théorique, les résultats les plus importants exposés dans la première partie du mémoire qui suit. Certains, au point de vue de l'analyse pure, nous obligent à faire ou à indiquer des applications intéressantes du cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique ou de notions plus difficiles sur les équations différentielles. Nous envisageons ainsi une équation différentielle linéaire, une équation de Riccatti intégrable, des équations aux dérivées partielles linéaires ou non, des équations différentielles linéaires du type de Fuchs.

INTRODUCTION DE LA RÉDACTION ACTUELLE

(16 novembre 1903)

Dans la partie théorique de la première rédaction, nous avions, par endroits, considéré le calcul surtout comme un moyen d'investigation ayant pour but de trouver ou de vérifier des lois naturelles ; nous avions fait, principalement dans les deux premiers paragraphes, sur le régime des nappes dans les périodes où les pluies ne leur profitent pas, des hypothèses commodes pour le calcul : ces hypothèses nous donnaient un certain nombre de résultats conformes qualitativement à des résultats expérimentaux ; elles ont eu, en particulier, cette conséquence pratique de nous conduire aux graphiques de prévision des débits des deux sources de Cérilly et Armentières (Vanne) indiqués dans la deuxième partie de notre mémoire, et nous ont donné pour l'expression du débit en fonction du temps les deux formes $Q = ae^{\alpha t}$, $Q = \frac{b}{(1 + \beta t)^2}$ [1], dont nous avons signalé la concordance avec

[1] Comp. C. R., 27 octobre et 23 novembre 1903, et *Annu. Soc. Météor.*, 3 novembre 1903. On a très sensiblement, d'après nos récents calculs, effectués sur l'insistance de M. Boussinesq, pour Cérilly $Q = 300\, e^{-0,1056\, t}$, pour Armentières $Q = 158^{l},8 + \frac{700}{(1 + 0,120\, t)^2}$ (Q en litres par seconde, t en mois).

les graphiques de prévision des deux sources ci-dessus, et qui, d'ailleurs ont été ensuite établies plus rigoureusement (avec, il est vrai, dans le premier cas, des hypothèses en partie différentes sur la nature du fond) par M. Boussinesq dans sa communication des 22 juin-fin juillet 1903 à l'Académie des Sciences. Mais, malgré tout, certaines de nos hypothèses, ainsi que nous l'a fait remarquer M. Boussinesq [1], étaient théoriquement inexactes, bien que, pratiquement, elles fussent assez approchées, à certains égards, pour donner, dans les limites où nous nous en sommes servi [2], d'une façon sûre, toute une série de résultats exacts, en particulier sur le régime des nappes à fond horizontal. On l'indiquera suffisamment plus loin (p. 37 et suiv.).

Aux résultats mentionnés précédemment, nous avons cru utile d'en ajouter de nouveaux : vers la fin de la première partie de notre première rédaction, nous indiquions (voir ci-après, p. 113) comment on pouvait étendre aux nappes souterraines l'analyse développée par M. Boussinesq pour établir les équations fondamentales du mouvement des eaux courantes (*Essai sur la théorie des eaux courantes*, p. 1 à 46) en tenant compte des irrégularités de forme des canaux capillaires où l'eau circule [3]. La suite naturelle de ces indications comportait l'attaque du problème du mouvement des eaux dans les nappes continues avec des équations rigoureuses. M. Boussinesq a trouvé le problème assez beau pour lui consacrer un important mémoire [4], avant que nous ayons eu le temps, eu égard à nos autres travaux, de nous en occuper. Mais il reste encore beaucoup à faire, M. Boussinesq ayant surtout traité la question du mouvement sans apports d'eau extérieurs. Il est vrai que notre première rédaction contenait déjà des résultats,

[1] C'est une occasion pour nous de remercier M. Boussinesq soit à cet égard soit pour les conseils qu'il a bien voulu nous donner à la suite de la lecture de notre mémoire. C'est cette remarque qui nous a décidé à le retirer du Secrétariat de l'Académie des Sciences. Elle ne s'appliquait guère qu'aux résultats mentionnés p. 37-45.

[2] Peut-être aussi la rédaction ne faisait-elle pas bien ressortir que nous ne nous servions de nos hypothèses que dans de certaines limites au point de vue de la forme de la nappe.

[3] Des procédés analogues paraissent immédiatement applicables pour l'extension des équations de l'élasticité aux milieux non homogènes (sol élastique, mortier, béton, etc.).

[4] C. R., juin-juillet 1903, *J. de Math.* (Liouville, Jordan), 1904.

croyons-nous, importants, dans le cas où l'on tient compte de ces apports.

Nous avons dès lors développé ci-après une théorie géométrique et mécanique de nos graphiques d'investigation et de prévision des débits et de la courbe des débits d'une source un peu plus complète que dans la première rédaction de notre mémoire, et qui, moyennant une hypothèse (V volume d'eau de la nappe fonction croissante du débit Q de la source), s'applique aussi bien aux nappes discontinues. Nous définissons la courbe des débits d'une source dans la période de régime propre ou non influencé où la nappe ne reçoit pas d'apports d'eau extérieurs (ceci a lieu, comme on sait, à peu près, pour certaines sources d'après la loi de Dausse). Les 3 notions $V = f(Q)$, existence d'un graphique de prévision, existence d'une courbe des débits sont équivalentes : l'exactitude de l'une d'elles entraîne celle des deux autres.

En dehors des solutions exactes indiquées par M. Boussinesq, nous indiquons des solutions simples ou approchées pour les nappes à fond parabolique convexe [1] (nappe à régime propre permanent, $Q = Ae^{-2kct}$, $kc > 0$), à fond parabolique concave (surface libre rectiligne, $Q = Ae^{-6kct} + Be^{-4kct} + Ce^{-2kct}$, $kc > 0$), à fond rectiligne (surface libre rectiligne) et dans divers autres cas. L'intérêt de ces solutions particulières, comme des solutions particulières de M. Boussinesq, est de fournir des formules ou des graphiques corrélatifs que le praticien peut essayer, et, inversement, après succès, des indications possibles sur la forme géométrique du fond de la nappe. Nous indiquons sur des exemples la possibilité de trois types de nappes : nappes à origine amont fixe, nappes à origine amont variable, l'épaisseur étant nulle à cette origine; nappes à sommet variable et présentant deux versants. M. Boussinesq ne s'est guère occupé que du premier type.

Enfin nous étudions les crues dans les nappes : la plupart des résultats essentiels obtenus dans ce cas étaient déjà contenus dans la première rédaction de notre mémoire, mais la forme en a été rendue plus rigoureuse et plus générale ; nous avons ajouté quelques pages sur la forme des ondes souterraines et leur stabilité ; ainsi : 1° aux points où la hauteur d'eau est maxima ou minima par

(1) C'est-à-dire dont la section droite est une parabole convexe.

rapport à x, s'il y a crue la surface libre est concave, s'il y a décrue elle est convexe ; 2° dans une nappe souterraine à fond rectiligne, les creux et les bosses de la surface libre tendent à disparaître ; 3° dans une nappe à fond parabolique convexe, il y a une solution exacte où l'épaisseur ne dépend que du temps t (régime propre permanent). Un pareil régime est stable pour une catégorie très étendue de petites perturbations momentanées.

CHAPITRE II

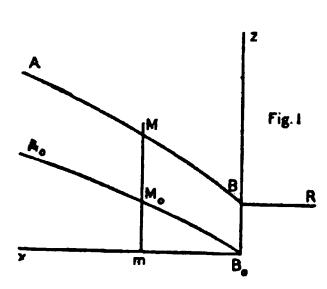
—

RÉGIME PROPRE DE CERTAINES SOURCES

Considérons une nappe souterraine superficielle alimentée exclusivement par les pluies et située dans des terrains perméables. D'après les lois bien connues de Dausse (1) et les études de Belgrand, on sait qu'il y a, au moins dans certaines régions du bassin de la Seine, des périodes où les pluies profitent sérieusement à la nappe, d'autres où elles ne profitent presque pas. Cette dernière circonstance, dans le bassin de la Seine, pour certaines nappes un peu profondes, se produira particulièrement pendant la saison chaude (1er mai-1er novembre).

Dans cette période, la nappe ne reçoit à peu près aucun apport d'eau extérieur. Elle se vide par les sources et le volume total V d'eau qu'elle contient diminue.

On peut admettre, sous réserves de vérifications expérimentales ou théoriques, et la théorie (2) confirme dans certains cas cette hypothèse, qu'un régime déterminé peut s'établir ou tendre à s'établir.



Considérons par exemple (fig. 1) une nappe A_0B_0BA, où A_0B_0 est le fond imperméable : l'eau souterraine, qui coule de gauche à droite, débouche dans un petit cours d'eau BR (à ciel ouvert ou non, la pression en BR étant supposée égale à la pression atmosphérique ou très voisine) et se meut dans le plan de la figure, normal au cours d'eau : AB est la surface de l'eau de la nappe. Nous

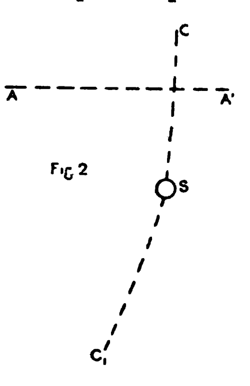
(1) Belgrand. — La *Seine*, études hydrologiques, Paris, 1872, p. 65.
(2) Boussinesq. — C. R. juin et juillet 1903.

prenons comme axe des x, l'horizontale B_0x passant par le point où le fond de la nappe rencontre le cours d'eau ou collecteur, comme axe des z, normal sur B_0x, la verticale B_0z à la limite de la couche perméable et du collecteur.

Admettons encore que le débit Q décroît, mais d'une façon très lente et que, à chaque valeur de Q correspond une forme déterminée de la nappe. Il pourra se faire, par exemple, que plus Q est petit, plus, sur une même verticale, pour une même valeur de x, Mm est petit : le niveau de la nappe va en chaque point en s'abaissant avec le temps et diminue en même temps que Q. Ce régime spécial, dont nous admettons l'existence, sera appelé *régime propre ou non influencé* de la nappe correspondante, par opposition aux régimes où des pluies profitent à la nappe et qui seront *des régimes influencés*. Q est alors une fonction croissante de V.

Il ne sera pas difficile d'étendre ceci au cas d'une source.

Soit par exemple (fig. 2) S une source alimentée par 2 canaux souterrains CS, C_1S, ayant une légère pente vers S, les lignes de plus grande pente de la surface imperméable sur laquelle repose la nappe étant perpendiculaires en plan à CS, C_1S. Soit AA′ une section de la nappe par un plan vertical normal à la projection CS et le débit Q (par unité d'épaisseur mesurée normalement à AA′) ; on pourra appliquer à AA′ ce que nous venons de dire. Si les sections de SC et SC_1 sont assez grandes pour que l'écoulement ne s'y fasse pas sous pression, ou encore si cette pression est assez faible pour qu'on puisse la négliger, le débit en S pour le canal SC sera



$\int_{CS} Q ds$, ds étant un élément de longueur de $SC = \lambda$. Si la longueur SC n'est pas trop grande, ni sa pente, on pourra écrire $\int_{CS} Q ds = Q'\lambda$ [1], Q′ étant une valeur moyenne entre les diverses valeurs de Q. Pourvu que les diverses sections AA′ du fond de la

[1] Cette formule était indiquée dans notre mémoire manuscrit du 8 mai 1903. Une formule analogue a été donnée par M. Boussinesq. (C. R., 22 juin 1903).

nappe soient à peu près superposables, un grand nombre des résultats exacts pour AA′ restera vrai pour l'ensemble de la nappe; en particulier Q′ aura une foule de propriétés communes avec Q.

Le régime de la source qui correspond au régime propre ou non influencé de la nappe dans chaque section AA′ pourra être appelé *le régime propre ou non influencé de la source.*

Remarque. — L'hypothèse des canaux souterrains SC, SC_1 ou de plus de 2 canaux analogues drainant une nappe est conforme à une foule de faits connus (Voir par exemple Martel, les *Abîmes*, et C. R., 10 octobre 1902 et 2 mars 1903; Pochet, « Note sur la fontaine de Vaucluse », *Bulletin de l'Hydraulique agricole*, fasc. Y, 1901, p. 195; *Annales de l'Observatoire de Montsouris*, 1900-1902, *passim*, entre autres *Sources de la Dhuis*, t. II, 1901, p. 259),

Ceci nous amène à dire un mot incidemment de la communication de M. Martel, du 2 mars 1903 (C. R., 1er sem. 1903, p. 572), intitulée « Sur l'enfouissement des eaux souterraines et la disparition des sources ». Des faits analogues à ceux dont parle M. Martel, ont été systématiquement formulés depuis longtemps dans le bassin de la Seine (Voir, par exemple, Belgrand, la *Seine*, études hydrologiques, et de Préaudeau, *Manuel hydrologique du bassin de la Seine*, Paris, 1884. p. 30). Le service hydrométrique central et divers services d'ingénieurs de ce bassin étudient depuis 30 ans au moins les tarissements de certaines rivières (voir plus loin, p. 146 et 172). Des travaux d'étanchement ont parfois été faits pour diminuer ces tarissements, dans la Haute-Marne en particulier.

Mais il ne s'agissait là que de phénomènes temporaires, dont les variations dépendent à peu près exclusivement des variations des chutes de pluies. Toutes les prévisions antérieures de bas débits des sources et de grands tarissements ont eu pour base la faiblesse des hauteurs de pluie de la saison froide, et parfois des saisons froides antérieures.

Or, nous avons vu suffisamment, croyons-nous (*Résumé* des observations centralisées par le service hydrométrique du bassin de la Seine de 1891 à 1900, *Ann. Soc. Météor*, 1903, janvier) que la période 1891-1900 est, au point de vue des pluies, une période beaucoup plus sèche que les périodes 1871-1880, 1881-1890 et aussi au point de vue des niveaux des rivières et des débits des sources. Ainsi (p. 5 de ce résumé) :

Pluies dans le bassin de la Seine (moyennes géométriques) :

1861-1870	1871-1880	1881-1890	1891-1900
636 millimètres	728 millimètres	711 millimètres	668 millimètres

Ceci a suffi pour que la source de Cérilly (Vanne) ait de 1881 à 1890 un débit moyen de 199 litres par seconde, et de 1891 à 1900 de 157 litres.

Que dans une période décennale de ce genre surviennent une ou deux années très sèches pendant la saison froide, et même pendant la saison chaude qui n'est pas absolument négligeable, et nous verrons des tarissements, des faiblesses de débits des sources et des rivières exceptionnels. Si nous nous reportons aux années 1893 et 1900-1901 (Résumés annuels du service hydrom. de ces années dans l'*Ann. de la Soc. Météor.*), nous y trouvons des phénomènes précisément exceptionnels au point de vue de la sécheresse, au moins pour certaines régions (en 1893 Laignes, en 1900-1901, environs de Dreux et la Loupe). Inversement, des années exceptionnellement pluvieuses ont vu se produire des niveaux exceptionnels, des sources éphémères, etc. (Belgrand, la *Seine*, études hydrologiques, p. 215; résumé du service hydrométrique pour 1897). Or, ce qui nous a frappé, dans la communication précitée de M. Martel, c'est qu'il cite des phénomènes constatés à des dates précises, et que plusieurs d'entre elles coïncidaient avec ces dates de 1893 et 1901, la première de ces 2 années ayant été extraordinairement sèche dans le sud-ouest de la France [1]. Nous n'avons pas évidemment les éléments pour apprécier si ces phénomènes ne sont pas dus à ces sécheresses ; mais il nous semblerait indispensable, pour la thèse de M. Martel, que la question fût examinée à ce point de vue.

D'autre part, les faits de niveaux et de débits exceptionnellement hauts constatés à des époques anciennes ont pu parfaitement coïncider avec une suite d'années très pluvieuses.

Peut-être même doit-on aller plus loin : nous avons vu dans notre note précitée (résumé de 1891-1900, p. 5) que les hauteurs

[1] J'y ai vendu, comme ingénieur, dans le Tarn-et-Garonne, à titre exceptionnel, des produits d'élagage de divers arbres, de peupliers entre autres, pour le bétail.

moyennes décennales de pluie dans le bassin de la Seine étaient peut-être en rapport avec les hauteurs maxima des crues, à Paris. En est-il plus ou moins de même ailleurs ? C'est une étude à faire : mais, d'après M. Von Tein (Hochwasserverhältnisse im Rheingebiet, VI Heft, bassin du Main, p. 91, Berlin, 1901) le niveau des plus fortes crues connues du Main, à Francfort ([1]) serait de 8m,75 en 1342 (crue d'été), 7m,72 en 1682 (débâcle), 7m,42 en 1784 (débâcle), 7m,28 en 1845 (débâcle). Cela indique-t-il depuis le XIVe siècle une diminution progressive des chutes de pluie dans la moyenne. On pourrait objecter le caractère de la plupart de ces crues (crues de débâcle) et le fait que des travaux d'amélioration du Main ont pu abaisser le niveau des crues. Mais, d'après le même travail (Der Rheimstrom, 1889, p. 185, 196, 214), dans une partie au moins du bassin du Rhin, les inondations du XIVe siècle paraîtraient avoir été particulièrement désastreuses. Il en résulterait qu'il y a eu antérieurement des siècles ou des périodes beaucoup plus pluvieuses qu'actuellement. Les observations de pluie que nous connaissons, ne permettent guère d'élucider la question. Mais ce serait en tout cas une explication bien simple de la diminution du débit de certaines sources ou rivières, ou même de leur disparition depuis plusieurs siècles.

Cela évidemment n'empêcherait pas la thèse de M. Martel d'être exacte dans un assez grand nombre de cas, mais en restreindrait la généralité probablement.

En résumé, nous ne prétendons pas infirmer la thèse de M. Martel, qui a fait de si beaux travaux au point de vue des eaux souterraines ; mais nous pensons que, pour un certain nombre des cas qu'il cite, un examen des faits au point de vue météorologique serait indispensable ([2]). Cet examen est d'autant plus nécessaire que Belgrand a cherché (*Le bassin parisien aux âges antéhistoriques*, Paris, 1869) à expliquer un phénomène autrement considérable,

([1]) Plus hautes crues de la Seine à Paris (pont de la Tournelle) depuis 1600 (*Manuel hydrologique*, tableau XII) : février 1649, 7m,66 ; janvier 1650, 7m,80 ; *février 1658, 8m,80* ; avril 1690, 7m,50 ; juin 1697, 7m,35 ; mars 1711, 7m,55 ; décembre 1740, 7m,91 ; janvier 1802, 7m,43.

([2]) A moins qu'on n'applique cette thèse à une période de plusieurs milliers d'années au moins, auquel cas elle contribuerait peut-être un peu à expliquer le phénomène de la disparition des crues quaternaires dans le bassin de la Seine.

celui de la disparition des crues quaternaires dans le bassin de la Seine, par l'hypothèse d'un climat différent et plus pluvieux à l'époque de la pierre taillée.

Hypothèse plus générale. — Sans s'occuper de la forme de la surface libre de la nappe et de sa constitution intérieure, on pourra appeler RÉGIME PROPRE OU NON INFLUENCÉ *d'une source et de la nappe correspondante, son régime plus ou moins bien défini, dans les périodes où il n'y a pas d'apports d'eau extérieurs.*

Les seules hypothèses que nous ferons dès lors dans ce paragraphe sur le régime propre, c'est que le débit Q *de la source diminue avec le temps et que* V *est une fonction de* Q *seul, fonction qui croît avec* Q.

Formules applicables au régime propre. — Soit V le volume total de la nappe ; on a, à la source, (ou en B, fig. 1)

$$dV = -Q dt, \tag{1}$$

Q étant le débit de la source.

Or, nous supposons que, à chaque valeur de Q corresponde une valeur de V. On aura alors

$$V = f(Q). \tag{2}$$

On en conclut

$$dV = f'(Q) dQ, \quad f'(Q) > 0, \tag{3}$$

$$f'(Q) dQ = -Q dt, \tag{4}$$

$$dt = -\frac{f'(Q) dQ}{Q}, \tag{5}$$

et, en intégrant

$$\left\{ \begin{array}{l} t - t_0 = \varphi_1(Q_0) - \varphi_1(Q \\ \text{avec} \\ \varphi'_1(Q) = \dfrac{f'(Q)}{Q}. \end{array} \right. \tag{6}$$

Q_0 étant le débit à l'instant t_0, t et t_0 étant compris dans la période où le régime étudié ici est réalisé.

Comment trouvera-t-on t_0 dans la pratique? Pour préciser, considérons un exemple particulier, celui de certaines sources de la Vanne (Cérilly, Armentières).

Dans la pratique, les pluies ne profitent pas à la nappe souterraine, d'après la loi bien connue de Dausse pour les terrains perméables du bassin de la Seine, soit dans la saison chaude (1er mai-1er novembre) quand les chutes de pluie ne sont pas exceptionnelles, soit même au début ou à la fin de la saison froide, s'il pleut fort peu. Or, les pluies peuvent intervenir en général pour augmenter le débit ou l'empêcher de diminuer trop vite. Pour les sources de la Vanne, leur action suit leur chute d'assez près, car elle se fait sentir au bout d'un mois au plus. Pour être sûr qu'elles ne profitent pas à la nappe à un moment donné, il faudra d'abord que le débit à ce moment aille en décroissant. On sera à peu près certain qu'il en est ainsi (1) en prenant pour t_0 la date de mai ou juin, si ces mois ne sont pas trop pluvieux, et l'on pourra appliquer la formule (6) jusqu'à un moment où les pluies recommencent à profiter à la nappe, c'est à-dire jusqu'en novembre-décembre généralement. Dans des cas plus particuliers, on devra prendre comme instant initial t_0 une date ultérieure; par exemple, si un maximum a lieu en juillet, on prendra pour t_0 juillet ou août. Si, en prenant juillet, le débit réalisé en août est plus fort que l'indique la formule (6), on évaluera les débits ultérieurs en prenant pour t_0 la date d'août, et ainsi de suite. Les prévisions faites plusieurs mois à l'avance à l'aide de la formule (6) pourront être corrigées au fur et à mesure à l'aide des résultats de l'expérience. Nous verrons d'ailleurs que cela est rarement nécessaire, comme cela doit être d'après la loi de Dausse.

La formule (6) constituera ainsi sur notre graphique antérieur (2) pour la prévision des débits minima un progrès à certains égards, puisqu'elle permet suffisamment d'avance des corrections aux annonces faites et donne la marche du débit. Elle a d'ailleurs

(1) Voir plus loin le tableau des débits de la source de Cérilly (tableaux III et VIII).

(2) C. R., Mai 1902; *Ann. Soc. Météor.*, juin 1902; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1902, 2me sem., p. 208.

l'avantage de faire intervenir moins les considérations météorologiques et plus les considérations mécaniques.

Il restera à trouver expérimentalement pour la source étudiée la fonction $\varphi_1(Q)$, ou encore à représenter graphiquement la formule (6).

Conséquences de la formule (6). Graphiques d'annonces. — Soit Q_1 le débit au temps $t_1 > t_0$, avec $t_1 - t_0 = v$; d'après (6).

$$v = \varphi_1(Q_0) - \varphi_1(Q_1). \tag{7}$$

v est positif; donc $\varphi_1(Q_1) < \varphi_1(Q_0)$, avec $Q_1 < Q_0$. $\varphi_1(Q)$ est fonction croissante de Q et $\varphi_1'(Q)$ est positif, ainsi que $f'(Q)$, ce qu'on a bien supposé.

Prenons comme abscisses le débit Q_0, comme ordonnées les débits Q_1, et, pour chaque valeur de v, construisons les courbes (7), en prenant, par exemple, des valeurs de v également espacées, de mois en mois si l'on veut. Nous aurons des courbes v_1, v_2, v_3, ... $(v_1 < v_2 < v_3 < \ldots)$ qui pourront être concaves ou convexes vers les Q_1 positifs.

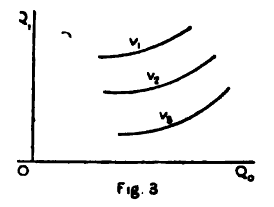


Fig. 3

Pour une valeur donnée de Q_0, Q_1 est d'autant plus petit que v est plus grand : *les courbes v_1, v_2, v_3, ... iront en se rapprochant de OQ_0, quand v croît* (fig. 3).

Signalons de suite une propriété générale importante des courbes (7), qui peut en faciliter la construction : prenons par exemple v égal à l'unité de temps (un mois si l'on veut), et partons du débit initial Q_0, puis considérons les équations

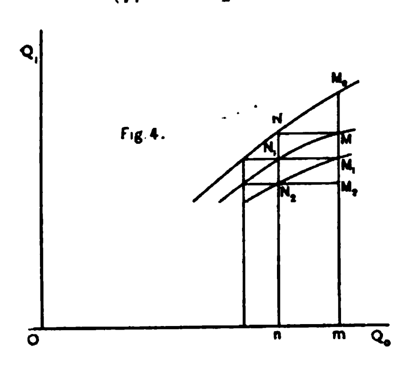
$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \varphi_1(Q_0) - \varphi_1(Q_1), \\ 1 = \varphi_1(Q_1) - \varphi_1(Q_2), \\ 1 = \varphi_1(Q_2) - \varphi_1(Q_3), \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{8}$$

Q_0 étant donné, ces équations déterminent successivement Q_1, Q_2, Q_3, ... à l'aide de la seule courbe $v = 1$. Mais on a aussi.

$$\left\{\begin{array}{l} 2 = \varphi_1(Q_0) - \varphi_1(Q_2) = \varphi_1(Q_2) - \varphi_1(Q_4) = \ldots, \\ 3 = \varphi_1(Q_0) - \varphi_1(Q_3) = \varphi_1(Q_3) - \varphi_1(Q_6) = \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{9}$$

Les ordonnés Q_3, Q_4, ... de la courbe $v = 2$, par exemple, correspondant aux abscisses Q_0, Q_2, ..., se déduisent de la courbe $v = 1$, c'est-à-dire que *la construction de la courbe $v = 1$ entraîne celle de toutes les autres.*

Supposons encore que nous ayons construit le graphique des courbes (7) correspondant à des valeurs de v formant une progression arithmétique, par exemple $v = 1, 2, 3, \ldots$, et considérons sur une même ordonnée les points M_0, M, M_1, M_2, .., des courbes 1, 2, 3, 4, ... Par M, sur la courbe 2, menons une parallèle à OQ_0 jusqu'à la courbe 1 en N, puis menons l'ordonnée Nn du point N ; soient N_1, N_2, ... ses points de rencontre avec les courbes 2, 3, ... ; nN_1 est le débit correspondant à $nN = mM$ au bout du temps 1 : donc $nN_1 = mM_1$.



De même

$$nN_2 = mM_2,\ nN_3 = mM_3,\ \ldots$$

Ces relations permettent d'ailleurs de déduire la construction de toutes les courbes v de la courbe $v = 1$, si l'on traduit géométriquement les raisonnements précédents (équations (8) et (9). En effet, la courbe M_0N correspond à $v = 1$. On aura, puisque $nN = mM$, $On = mM_0$; par conséquent, connaissant la courbe M_0N, pour construire le point M, on prendra $On = mM_0$, ce qui déterminera, en partant de M_0, nN, N et M ; et ainsi de suite. Donc.

Les courbes v_1, v_2, v_3,... peuvent se déduire d'une d'entre elles par une construction géométrique simple.

D'après les hypothèses que nous avons faites, ces courbes sont comprises entre OQ_0 et la bissectrice de l'angle Q_1OQ_0, dans les limites de la pratique. En effet, $v = 0$ correspond à $Q_1 = Q_0$, c'est-à-dire que la courbe $v = 0$ est la bissectrice en question. Quand v croît, les courbes correspondantes s'abaissent et restent au-dessus

de OQ_0, car les débits Q sont tous positifs. Tout point d'une de ces courbes situé sur OQ_0 correspond forcément au tarissement de la source.

Supposons, par exemple, que quand nN est égal à Q_0 (NM_0 correspondant à $v = 1$), on ait $Q_1 = 0$ au bout du temps α : celle des courbes (7) qui correspond à $v = \alpha + 1$ passe par n; celle qui correspond à $v = \alpha + 2$ passe par m. Si le tarissement ne se produit pas, c'est-à-dire ne se produit qu'au bout d'un temps infini, OQ_0 correspond à celle des courbes (7) pour laquelle le premier membre $v = \infty$. La courbe $v =$ c^te^ finie ne peut rencontrer OQ_0, sauf au point O, et comme elle est au-dessous de la bissectrice de Q_1OQ_0, dans le premier quadrant, elle passe par O.

Réciproquement, si toutes les courbes (7) passent par O, le tarissement ne se produira qu'au bout d'un temps infini. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que le tarissement ne se produise jamais est que toutes les courbes (7) *passent par l'origine.*

Etudions encore la concavité et la convexité des courbes (7). Une de ces courbes sera convexe vers les Q positifs si $\frac{dQ_1}{dQ_0}$ décroît quand Q_0 croît, c'est-à-dire si $\frac{d^2Q_1}{dQ_0^2} < 0$. Or

$$\varphi'_1(Q_0) - \varphi'_1(Q_1)\frac{dQ_1}{dQ_0} = 0,$$

d'après (7).

$$\frac{dQ_1}{dQ_0} = \frac{\varphi'_1(Q_0)}{\varphi'_1(Q_1)} > 0. \tag{10}$$

Il faudra et il suffira

$$\frac{d^2Q_1}{dQ_0^2} = \frac{\varphi''_1(Q_0)\varphi'_1(Q_1) - \varphi'_1(Q_0)\varphi''_1(Q_1)\frac{dQ_1}{dQ_0}}{\varphi'_1(Q_1)^2}$$
$$= \frac{\varphi''_1(Q_0)\varphi'_1(Q_1)^2 - \varphi'_1(Q_0)^2\varphi''_1(Q_1)}{\varphi'_1(Q_1)^3} < 0.$$

Mais $\varphi'_1(Q_1) > 0$: donc il faudra et il suffira

$$\frac{\varphi''_1(Q_0)}{\varphi'_1(Q_0)^2} - \frac{\varphi''_1(Q_1)}{\varphi'_1(Q_1)^2} < 0; \tag{11}$$

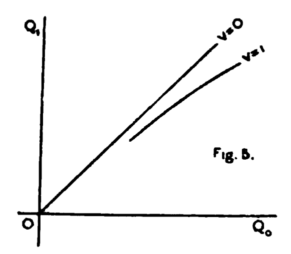
Soit $v = 1$ par exemple ; reprenons les équations (8) ; on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\varphi''_1(Q_0)}{\varphi'_1(Q_0)^2} - \frac{\varphi''_1(Q_1)}{\varphi'_1(Q_1)^2} < 0, \\ \frac{\varphi''_1(Q_1)}{\varphi'_1(Q_1)^2} - \frac{\varphi''_1(Q_2)}{\varphi'_1(Q_2)^2} < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Donc, par exemple,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\varphi''_1(Q_0)}{\varphi'_1(Q_0)^2} - \frac{\varphi''_1(Q_3)}{\varphi'_1(Q_3)^2} < 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si la courbe $v = 1$ *est convexe ou concave vers les* Q_1 *positifs, il en sera de même des courbes* $v = 2, 3, \ldots\ldots$



Supposons la courbe $v = 1$ convexe : les courbes (7) sont convexes. La figure 5 montre de suite que :

Quand les courbes (7) *sont convexes, la diminution du débit* Q_0 *à partir du temps* t *pendant l'unité de temps est d'autant plus grande que le débit à l'instant* t *est plus grand.*

On peut le vérifier [1] directement ; d'après (7)

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{1}{\varphi_1'(Q_1)},$$

$$\frac{dQ_1}{dQ_0} = \frac{\varphi_1'(Q_0)}{\varphi_1'(Q_1)} < 1$$

[1] Dans cette vérification, nous supposons convexes toutes les courbes (7), que v soit entier ou non, dès que $v > 0$. De plus, comme dans l'énoncé ci-dessus, on admet que le tarissement ne se produit qu'au bout d'un temps infini, ou, pratiquement, très long (plusieurs années).

à cause de la convexité, en sorte que $\varphi'_1(Q)$ est fonction décroissante de Q, et $\frac{1}{\varphi_1'(Q)}$ fonction croissante.

Mais cette circonstance peut se produire sans que les courbes v soient convexes : ainsi ce sera encore le cas si ces courbes sont des droites issues de l'origine, pour lesquelles $\frac{dQ_1}{dQ_0} = c^{te} = C$,

$$Q_1 = CQ_0, \qquad \frac{\varphi''_1(Q)}{\varphi'_1(Q)^2} = C_1\ (^1),$$

$$-\frac{1}{\varphi'_1(Q)} = C_1Q + C_2 = -\frac{Q}{f'(Q)},$$

d'après la formule (6). Alors

$$f'(Q) = -\frac{Q}{C_1Q + C_r} = -\frac{1}{C_1}\frac{C_1Q + C_2 - C_2}{C_1Q + C_2}$$

$$= -\frac{1}{C_1}\left(1 - \frac{C_2}{C_1Q + C_2}\right) = \frac{1}{C_1}\left(\frac{C_2}{C_1Q + C_2} - 1\right),$$

$$C_1f(Q) = \frac{C_2}{C_1}\log(C_1Q + C_2) - Q + C_3 = C_1V,$$

d'après la formule (2). En même temps,

$$dt = -\frac{f'(Q)dQ}{Q} = \frac{dQ}{C_1Q + C_2},$$

d'après (4),

$$t - t_0 = \frac{\log(C_1Q + C_2)}{C_1} + c^{te}$$

$$C_1(t - t_0) = \log\frac{C_1Q + C_2}{C_1Q_0 + C_2},$$

$$\frac{C_1Q_0 + C_2}{C_1Q + C_2} = e^{-C_1(t - t_0)}.$$

Les courbes $t - t_0 = c^{te}$ dans le plan Q_1OQ_0 passent par l'origine; donc $C_2 = 0$.

$$Q = Q_0e^{C_1(t - t_0)}.$$

Q décroissant quand t croît, il faut $C_1 < 0$, et

$$Q = Q_0e^{-\alpha(t - t_0)}, \qquad \alpha > 0.$$

(1) On vérifie de suite qu'on ne peut avoir $C_1 = 0$.

Donc

Quand les courbes (7) *se réduisent à des droites passant par l'origine, la loi du débit est*

$$Q = Q_0 e^{-\alpha(t-t_0)} \text{ (1)}, \quad \alpha > 0\,; \tag{12}$$

et réciproquement.

Nous verrons plus loin, à propos de la source de Cérilly, un exemple pratique du cas où les courbes (7) sont des droites passant par l'origine.

(1) Cette loi théorique a été rencontrée par nous dans la première rédaction de notre mémoire (8 mai 1903), grâce à des considérations théoriques discutables, il est vrai, dans leur principe, bien que les formules déduites de ces considérations puissent être au moins en partie exactes (voir plus loin, p. 44). Nous retrouverons encore plus loin (p. 49) une loi théorique de même forme pour les nappes à fond parabolique convexe. Cette loi théorique a été aussi rencontrée par M. Boussinesq (C. R., 22 juin 1903).

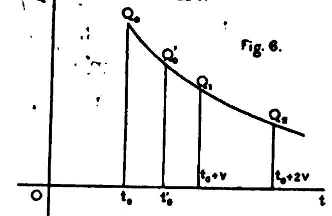
CHAPITRE III

CONSTRUCTION D'UNE COURBE DES DÉBITS POUR UNE SOURCE

On peut présenter autrement une partie des considérations précédentes. Considérons la courbe de variations des débits en fonction du temps (débits en ordonnée, temps ou abscisses) (fig. 6) pour une année déterminée A dans la période de régime propre.

D'après (7)

$$v = \varphi_1(Q'_0) - \varphi_1(Q'_1),$$



Q'_0 et Q'_1 étant des débits correspondants réalisés pendant une autre année B dans une période analogue à un intervalle de temps v. Supposons que l'ordonnée Q'_0 existe sur la figure, et ait été réalisée l'année A au temps t'_0 : soit Q''_1 le débit lu sur la figure au temps $t'_0 + v$, en supposant que Q''_1 existe sur cette figure. On a

$$v = \varphi_1(Q'_0) - \varphi_1(Q''_1),$$

d'où $Q'_1 = Q''_1$, puisque $\varphi_1(Q)$ est fonction constamment croissante de Q.

La partie de la courbe des débits de l'année A *où figurent des débits réalisés pendant une autre année* B *dans la période de régime propre ou non influencé coïncide avec la partie de la courbe des débits de l'année* B *correspondant à ces débits, pourvu que*

l'origine du temps soit convenablement choisie chacune de ces deux années.

Si nous portons sur le même graphique la courbe de l'année A et celle de l'année B, ces 2 courbes se superposeront en partie, et se prolongeront en partie (fig. 7), à condition de changer convenablement l'origine des temps pour B.

Considérons maintenant une 3e année C. Supposons que la période de régime non influencé de cette année C comprenne des débits, par exemple q_0, qui ne figurent que dans la courbe de l'année A, et d'autres, par exemple q_1, qui ne figurent que dans la courbe de l'année B. Prenons un débit intermédiaire q_2 dans la partie de la courbe commune aux 2 années.

Soient, pour l'année A, θ_0, $\theta_0 + v_0$ les temps correspondant à q_0, q_2; pour l'année B, $\lambda + \theta_0 + v_0$, $\lambda + \theta_0 + v_1$ les temps correspondant à q_2 et q_1.

Si, pendant l'année C, q_0 est réalisé au temps $\lambda_1 + \theta_0$, nous savons, d'après ce qui précède, par la comparaison des années A et C, que q_2 y sera réalisé au temps $\lambda_1 + \theta_0 + v_0$. De même, q_2 étant réalisé au temps $\lambda_1 + \theta_0 + v_0$, nous savons, par la comparaison des années B et C, que q_1 sera réalisé au temps $\lambda_1 + \theta_0 + v_1$. Par conséquent, le graphique des années A et B nous permet, le débit q_0 étant réalisé à un instant $\lambda_1 + \theta_0$, par réunion et superposition des courbes de deux années, de prévoir le débit q_1 pour le temps $\lambda_1 + \theta_0 + v_1$; et ainsi de suite : la courbe ainsi obtenue sera ce que nous appellerons la *courbe des débits de la source dans la période de régime propre ou de non influence.* Finalement :

La détermination de la courbe des débits d'une source en fonction du temps dans la période de non influence ou de régime propre peut s'obtenir par la superposition des courbes de débits de plusieurs années.

Remarque. — La courbe ainsi construite permettra de faire des prévisions de débits aussi bien que les graphiques (7). On voit de suite qu'il suffira d'étudier la source pendant 2 à 3 ans pour pouvoir commencer à faire des prévisions. Il n'en est pas d'ailleurs différemment pour le graphique (7), puisque les observations de 2 ou 3 années donneront une partie importante de la courbe.

$$1 = \varphi_1(Q_0) - \varphi_1(Q_1),$$

d'où l'on peut déduire des portions des autres courbes (7), comme nous l'avons vu.

On remarquera que (6) donne

$$(6^{bis}) \qquad t + \varphi_1(Q) = t_0 + \varphi_1(Q_0) = \tau$$

τ étant une *constante*. C'est l'équation de la courbe des débits.

Les graphiques (7) sont plus compliqués à certains égards que la courbe des débits de la source, qui représente seulement une relation entre 2 variables ; mais ils pourront offrir de grands avantages : d'abord leur construction est très facile et peut être confiée à un employé intelligent ; ensuite il y aura des cas où les courbes de ce graphique (7) seront remarquablement simples : nous trouverons ainsi que ces courbes sont des droites pour la source de Cérilly (Vanne), alors que la courbe des débits, d'après un calcul antérieur, est de la forme

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t}, \qquad (\alpha > 0)\,[1],$$

Au surplus, nous allons indiquer le moyen de passer de la courbe des débits aux graphiques (7) et réciproquement.

Connaissant la courbe des débits, pour avoir le graphique (7) correspondant, ou, plus exactement, celle des courbes (7) correspondant à une valeur de v, il suffira de prendre sur la courbe des débits des ordonnées distantes de v, celle de gauche étant prise pour Q_0, celle de droite pour Q. On construira ainsi la courbe v par points.

[1] Dans ce cas, il est vrai, on peut poser $y = \log Q$ et remplacer cette courbe par $y - y_0 = -\alpha(t - t_0)$ qui est une droite dans le plan des y, t. Mais les calculs sont encore assez longs.

L'équation de la courbe des débits pourra se mettre sous la forme (6bis) qui donne de suite la forme (6).

Réciproquement, étant donné le graphique (7), l'abscisse Q_0 et l'ordonnée correspondante Q_1 de la courbe v représenteront 2 ordonnées de la courbe des débits dont les abscisses diffèrent de v. Mais cela ne suffit pas pour rendre commode la construction de cette courbe, en général.

Conséquences de l'existence vérifiée directement d'une courbe des débits ou d'un graphique analogue à (7) pour une source.

Nous sommes parti, pour arriver à la courbe des débits ou au graphique (7) de l'hypothèse $V = f(Q)$. Pratiquement nous ne pouvons vérifier cette hypothèse ; mais nous pouvons essayer de construire soit une courbe des débits, soit un graphique analogue à (7).

Admettons donc que nous ayons pu vérifier pour une source ([1]) l'existence d'une période, chaque année, où le débit $Q_1 = F_1(Q_0, \theta)$, c'est-à-dire où le débit Q_1 est fonction exclusivement d'un débit antérieur réalisé la même année et du temps θ qui sépare les débits Q_1 et Q_0, la fonction étant la même pour 2 années quelconques.

On peut encore écrire

$$\theta = F_2(Q_1, Q_0), \qquad O = F_2(Q_0, Q_0).$$

Si θ est infiniment petit, remplaçons-le par $d\theta$, et $Q_1 = Q_0 + dQ_0$;

$$d\theta = (F_2')_{Q_1}\, dQ_0 = \Phi'(Q_0)dQ_0. \tag{13}$$

Ceci a lieu, par hypothèse, quel que soit Q_0 : on en tire

$$\theta = \int_{Q_0}^{Q_1} \Phi'(Q_0)\, dQ_0 = \Phi(Q_1) - \Phi(Q_0).$$

([1]) Ceci est absolument indépendant de la nature du terrain et de la nappe : celle-ci peut être continue ou discontinue, et même présenter une disposition quelconque de drains ou de collecteurs (comme en ont supposé MM. Meurdra et Martel).

On retrouve une relation de la forme (7). Dans le cas particulier où la courbe des débits est donnée par $Q_1 = Q_0 F(\theta)$, F étant indépendant de Q_0,

$$Q_1 = Q_0 [F(o) + \theta F'(o) + \dots],$$
$$F(o) = 1,$$

et

$$(14) \qquad \begin{cases} dQ_1 = aQ_1\, d\theta = aQ_1 dt \\ Q_1 = C\, e^{at} \end{cases}$$

où a est négatif, si Q_1 ou Q décroît avec le temps. On retrouve ainsi la formule (12).

Or lorsque $Q_1 = Q_0 F(\theta)$, le graphique analogue à (7) est formé de droites passant l'origine et réciproquement.

Il suffira donc que l'on ait pu construire pour une source, un graphique $Q_1 = F(Q_0, \theta)$ *formé des courbes* $\theta = c^{te}$ *dans le plan des* Q_1, Q_0, *et que ce graphique soit formé de droites passant par l'origine, pour que l'on puisse affirmer que le débit*

$$Q = Q_0 e^{-\alpha(t - t_0)}$$

dans la période où le graphique s'applique.

Il nous paraît encore utile d'indiquer ce que sont les courbes (7) quand

$$(\omega) \qquad Q = \frac{A}{(1 + \alpha t)^2}, \qquad \alpha > 0.$$

Alors

$$1 + \alpha t = \sqrt{\frac{A}{Q}}, \qquad 1 + \alpha t_0 = \sqrt{\frac{A}{Q_0}},$$

$$(t - t_0)\frac{\alpha}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{Q_0}}.$$

Les courbes (7) sont de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{Q_0}} = \lambda(t - t_0) = C, \qquad (C\ c^{te}).$$

$$\varphi_1(Q) = -\frac{M}{\sqrt{Q}}, \qquad (M > 0)$$

croît avec Q ;

$$\varphi'_1(Q) = \frac{1}{2}\frac{M}{Q^{\frac{3}{2}}}; \qquad -\frac{1}{\varphi'_1(Q)} = -\frac{2Q^{\frac{3}{2}}}{M};$$

$$\frac{\varphi_1''(Q)}{\varphi'_1(Q)^2} = -\frac{3Q^{\frac{1}{2}}}{M}$$

est fonction décroissante de Q, et les courbes sont convexes (p. 17).

Inversement, si nous avons construit directement un graphique $Q_1 = F(Q_0, \theta)$, et si les courbes $\theta = c^{te}$ peuvent être représentées par

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{Q_0}} = C = F(\theta) = F(O) + \frac{\theta}{1}F'(O) + \ldots,$$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{Q + dQ}} - \frac{1}{\sqrt{Q}} = -\frac{1}{2}\frac{dQ}{Q^{\frac{3}{2}}} = a\,dt,$$

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} = at + b,$$

$$Q = \frac{A}{(1 + \alpha t)^2} = \frac{Q_0}{(1 + \alpha t)^2},$$

Q étant le débit pour $t = O$.

Ce cas est intéressant, parce que le graphique paraît alors se rapprocher du graphique de la source d'Armentières (Vanne, voir plus loin graph. 6) et que la formule (ω) ci-dessus se rencontre dans la théorie mathématique des nappes à fond horizontal (voir plus loin, p. 39).

Au surplus, l'existence d'une courbe des débits ou d'un graphique $Q_1 = F(Q_0, \theta)$ pour une source pendant une période déterminée de l'année où la nappe ne reçoit pas d'apports extérieurs entraîne encore une autre conséquence : la formule (1) a alors lieu, car elle est vraie pour toute nappe non alimentée ; donc

$$(15) \qquad dV = -Q d\theta,$$

et, d'après (13),

$$(16) \qquad dV = -Q\Phi'(Q)dQ.$$

De plus, si, d'après la courbe des débits ou le graphique, pour $d\theta$ positif, dQ est négatif, $\Phi'(Q)$ est négatif ; dV sera négatif en même temps que dQ, et V, qui est une fonction de Q, croît avec Q. Donc :

De l'existence vérifiée expérimentalement d'une courbe des débits ou d'un graphique $Q_1 = F(Q_0, \theta)$ pour une source pendant une période de l'année où la nappe ne reçoit pas d'apports extérieurs, on déduit que, pendant cette période, le volume emmagasiné dans la nappe est une fonction du débit de la source, fonction qui croît avec ce débit, si ce dernier est fonction décroissante du temps.

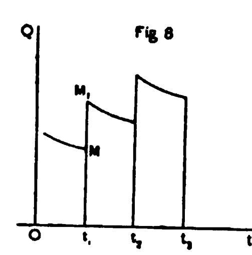
Cette existence entraîne ainsi l'exactitude pour la source du postulat sur lequel sont fondées la plupart des considérations du chap. II. On peut donc dire que ce postulat entraîne l'existence d'une courbe des débits ou d'un graphique $Q_1 = F(Q_0, \theta)$, *et réciproquement*, dans les périodes en question.

Relation entre les débits minima de 2 années consécutives. — Nous allons essayer de relier le débit minimum Q_0 d'une année à l'ensemble des diverses quantités de pluie qui profitent à la nappe dans la saison froide suivante, et à un des débits de l'année suivante, voisin du débit minimum, de façon à justifier par une théorie approchée la loi expérimentale que nous avons fait connaître

antérieurement à cet égard pour les sources de Cérilly et Armentières [1].

Nous admettons, bien entendu, qu'il s'agit de sources assez profondes, analogues à ces dernières, dans des terrains perméables, où les ruissellements sont négligeables, et où les pluies de la saison chaude sont, en général, absorbées par le sol sans profiter à la nappe, c'est-à-dire s'évaporent ou passent à l'état d'eau d'imbibition.

Supposons que la nappe emmagasine des eaux de pluies y produisant des surélévations χ_1, χ_2, ..., à des instants t_1, t_2, ... Si ces pluies sont tombées [2] à des instants θ_1, θ_2, ..., on peut admettre que $t_i - \theta_i$ est à peu près constant, ou même assez faible en pratique. Pour construire la courbe C représentant les variations du débit, on portera, aux instants t_1, t_2, t_3, ..., en abscisses, les débits résultant du débit immédiatement antérieur à la pluie et des accroissements de hauteur χ_1, χ_2, χ_3, ... correspondants. Dans les intervalles, nous admettrons que le débit va en décroissant, ou, au moins ne va pas en croissant sensiblement, la décroissance devant, en tout cas, se produire peu de temps après les temps t_1, t_2, t_3, ... [3].



Il ne s'agit donc ici que de sources dont les crues ont leur maximum peu de temps après les pluies, comme sont les sources de Cérilly et d'Armentières.

Considérons maintenant ce qui se produit généralement pendant toutes les saisons froides : on a une suite d'accroissements χ_1, χ_2, χ_3, ..., χ_i auquels correspondent des accroissements de débits de la source $\lambda(\chi_1)$, $\lambda(\chi_2)$, ..., $\lambda(\chi_i)$. Soient Q_0, Q_1, Q_2, ... les débits

(1) C. R., mai 1902, 1er sem. ; *Ann. des Ponts et-Chaussées*, 1902 ; *Annu. Soc. Météor.*, 1902.

(2) La hauteur de pluie H_0 met un certain temps, entre les instants T_0 et T_1, à tomber. L'instant θ_i correspondra à peu près au moment où l'on a la hauteur de pluie $\frac{H_0}{2}$ dans la période de pluie où tombe H_0.

(3) On pourrait chercher à spécifier avec plus de précision la loi de décroissance, admettre par exemple que c'est celle du régime propre de la source. Mais cela n'est pas indispensable.

aussitôt avant l'arrivée à la nappe des pluies correspondantes; Q'_1, Q'_2, ... les débits immédiatement consécutifs. On a

$$\begin{cases} Q'_1 = Q_0 + \lambda(\chi_1) > Q_1, \\ Q'_2 = Q_1 + \lambda(\chi_2) > Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q'_i = Q_{i-1} + \lambda(\chi_i). \end{cases}$$

Le régime deviendra non influencé peu de temps après la réalisation du débit Q'_i.

Plaçons-nous en outre dans des conditions météorologiques déterminées, en considérant un cas analogue à celui de la source de Cérilly. En automne ou vers le début de l'hiver tombent à peu près périodiquement des pluies que Belgrand a appelées *pluies préparatoires* (*des crues*), qui déterminent l'imbibition complète du sol, de façon à le rendre incapable d'absorber l'eau ou de la retenir; en sorte que, au bout de cette période de pluies, l'eau tombée ou bien profite en grande partie aux nappes souterraines dans les terrains que Belgrand a appelés perméables, ou bien remplit rapidement les vides du sol, puis ruisselle, dans ceux qu'il a appelés imperméables. Ces pluies préparatoires, qui tombent dans un intervalle de temps d'un mois environ, et sont très souvent immédiatement suivies de petites crues ou de pluies importantes amenant une crue, donnent un total de pluies que nous pouvons faire correspondre à χ_1 ou à χ_1 et χ_2 par exemple.

Si les pluies les plus importantes tombent un peu plus tard, en janvier et février, mais avant la fin de la saison froide, ce sera peut-être un débit ultérieur, Q'_4 par exemple, qui sera sensiblement plus fort que les précédents. Dès lors, si les pluies d'avril ne sont pas exceptionnelles par rapport à celles qui précèdent, on conçoit que le régime des nappes puisse se régler de façon que, à partir d'un certain moment, les débits Q' ne soient plus fortement supérieurs à tous les débits précédents : les pluies ne font plus que soutenir le débit. Le débit réalisé en mai, q' (ou même en juin ou juillet, si le débit de ces mois diffère peu de celui de mai; ainsi on pourra prendre pour q' le débit qui suit le débit maximum, même si celui-ci a lieu en juin ou juillet, en négligeant les pluies de la saison chaude), qui pourra coïncider avec Q'_i ou lui être un peu inférieur (à moins de sécheresse exceptionnelle en mars-avril)

donnera une idée moyenne approchée des débits Q'_1, Q_1, Q'_2, Q_2, ..., Q'_{i-1}, Q_{i-1}. D'ailleurs on a, en additionnant membre à membre les équations précédentes

$$q' + (Q'_i - q') + (Q'_{i-1} - Q_{i-1}) + \dots + (Q'_1 - Q_1) = \Sigma\lambda(\chi) + Q_0.$$

Soit Q le débit à un moment quelconque dans l'intervalle de t_1 à t_2, et $Q_1 \leqslant Q \leqslant Q'_1$. La décroissance du débit pendant le temps dt est, en valeur absolue, $\alpha Q dt$, α étant un coefficient qui peut dépendre ou non de Q. Il n'en dépendra pas si la loi de décroissance est réglée, dans l'intervalle de t_1 à t_2, par la loi (14); il en dépendra peu si la loi de décroissance est voisine, ou encore il pourra en dépendre peu si les Q_j et Q'_j ne varient que dans des limites assez faibles. Donc $Q'_1 - Q_1$ est de la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} \alpha Q dt,$$

où nous admettrons que α est peu variable. Donc

$$Q'_i - q' + Q'_{i-1} - Q_{i-1} + \dots + Q'_1 - Q_1$$

est une somme d'intégrales de cette forme. Cette somme sera $\alpha' Q' T$, Q' étant un débit compris entre le plus fort et le plus faible de ces débits, et α' le coefficient α correspondant. Le temps T commencera ici lors de la première croissance sérieuse du débit en hiver : on le prendra pratiquement égal à une constante, 6 mois à peu près, par exemple. L'examen des débits mensuels moyens en litres par seconde de la source de Cérilly, depuis 20 ans (voir plus loin, tableaux III et VIII*bis*) montre qu'il y a chaque année une période de 6 mois environ (le 1er semestre à peu près) où le débit est fort et diffère peu de la moyenne de ces 6 mois [1].

Comme nous venons de le voir, on aura une idée approchée de Q', en général, en prenant $Q' = q'$. On aura ainsi

$$q'(1 + \beta' T) = \lambda\Sigma(\chi) + Q_0, \tag{17}$$

[1] Comp. p. 56.

β' étant la valeur correspondante de α'. Cette égalité sera d'autant plus exacte que β'T sera plus petit [1].

Si, par hasard, les fortes pluies n'avaient lieu qu'en avril, peut-être peut-on admettre que q' donnera parfois une idée un peu exagérée de Q'. Le premier membre de notre dernière équation (17) sera un peu trop fort. Mais, comment évaluons-nous $\Sigma\lambda(\chi)$? Nous admettons que $\Sigma\lambda(\chi)$ est fonction de la somme ΣH des hauteurs de pluie H_1, H_2,... de la saison froide, de façon que $\Sigma\lambda(\chi)$

[1] La connaissance de la courbe des débits de la source permettra de trouver une limite supérieure de $\beta'T$ quand α est peu variable. Soient T_0, T_1 deux instants avec $T_0 - T_1 = T$, $Q(t)$ le débit au temps t, α étant peu variable, et le régime non influencé dans cet intervalle. On a

$$\int_{T_1}^{T_0} \alpha Q(t)dt = Q(T_1) - Q(T_0) = \alpha_1 Q''T,$$

Q'' étant compris entre $Q(T_1)$ et $Q(T_0)$, et

$$Q'' = \frac{1}{\alpha_1}\int_{T_1}^{T_0} \frac{\alpha Q dt}{T}.$$

Soit $\alpha = \alpha_1(1 + \varepsilon)$:

$$Q'' = \int_{T_1}^{T_0} \frac{Qdt}{T} + \int_{T_1}^{T_0} \frac{\varepsilon Q dt}{T}.$$

Donc $Q'' = Q'''(1 + \eta)$, η petit, Q''' étant le débit moyen dans l'intervalle T. Si l'on a

$$Q(T_0) \geqslant \frac{2}{3} Q(T_1),$$

$$\alpha_1 T = \frac{Q(T_1) - Q(T_0)}{Q''} \leqslant \frac{1}{3}\frac{Q(T_1)}{Q''} < \frac{1}{3}\frac{Q(T_1)}{Q(T_0)} \leqslant \frac{1}{2},$$

car on aura sensiblement $Q'' \geqslant Q(T_0)$, puisque $Q''' > Q(T_0)$, β' étant voisin de α, $\beta'T$ a une limite supérieure voisine de $\frac{1}{2}$.

On aurait une limite supérieure plus avantageuse en considérant T comme la somme de n intervalles T_1 à T_0, où le débit varie de $Q(T_1)$ à $Q(T_0)$, le rapport $\frac{Q(T_0)}{Q(T_1)}$ restant $\geqslant 1 - \frac{1}{m}$, et le débit Q ne variant, pendant la période T, que dans des limites assez restreintes. Il en sera sûrement ainsi si les jours de pluie sont assez nombreux, et les pluies assez bien réparties.

aille en croissant un peu plus vite que ΣH, parce que ces pluies profiteront, dans la saison froide, d'autant plus à la nappe, que le terrain est déjà plus imbibé. Nous poserons [1], par exemple, pratiquement $\Sigma\lambda(\chi) = M(\Sigma H + C)^s$, M, C, s c^{tes}, s un peu plus grand que 1, ou encore $\Sigma\lambda(\chi) = a + bH + cH^2$. Cette manière de faire attribue une importance un peu exagérée aux pluies d'avril, dont l'influence sur la nappe est atténuée par l'évaporation plus active ou l'action de la végétation. Le second membre $\Sigma\lambda(\chi)$ de notre équation (17) sera donc un peu trop fort, quand des pluies exceptionnelles auront lieu en avril. On conçoit qu'alors une certaine compensation puisse s'établir entre les erreurs par excès, forcément modérées, commises dans le calcul des 2 membres de (17), et que cette équation puisse donner le plus souvent des résultats approximativement exacts, quelle que soit la répartition des pluies dans la saison froide, avec les limites de la pratique. Finalement nous obtenons ce résultat :

Le plus fort débit q' *en mai, juin ou juillet de la période de régime propre pour certaines sources, dont celle de Cérilly (Vanne), est lié en général approximativement au débit minimum de la fin de l'année précédente* $Q_0 = q_0$ *et à la hauteur de pluie* ΣH *totale de la saison froide par une relation de la forme*

$$(18) \qquad Aq' = M(\Sigma H + C)^s + q_0$$
$$(M, C, s \text{ c}^{tes}, s > 1)$$

Des circonstances spéciales pourront peut-être rendre cette relation inapplicable : ainsi, de très fortes pluies en septembre-octobre, ou encore le fait que l'année précédant q_0 a eu une saison froide exceptionnellement pluvieuse. Nous chercherons ultérieurement à donner de ce dernier fait une explication basée sur la nature des matériaux constituant la nappe (p. 143).

On déduit de (18) un corollaire important : soit q'_0 le débit réalisé 5 mois après le débit q' (vers octobre-décembre, sauf les perturbations dues à des pluies exceptionnelles vers octobre ou avant) : q'_0 est une fonction de q' (formule (7)); par suite q_0, q'_0, ΣH sont à

[1] Voir plus loin p. 141, où ces deux formules sont établies.

peu près liés par une relation. Dans certains cas, on pourra prendre pour q'_0 le débit minimum, qui en diffère peu, et est réalisé à peu près à la même époque (cas de Cérilly et Armentières).

Loi. — *Pour un certain nombre de sources issues de nappes perméables et qui ont leurs débits minima réalisés chaque année à peu près vers la même époque, les débits minima de 2 années consécutives et la hauteur totale de pluie de la saison froide intermédiaire sont en général à peu près liés par une relation, qui ne peut devenir inexacte que par suite de circonstances météorologiques exceptionnelles:*

Considérons en particulier le cas où le graphique (7) est formé de droites (Cérilly, plus loin, p. 158 et graph. 4). On a

$$mq'_0 = q' \; (m \text{ c}^{\text{te}} > 1),$$

et la formule (17) deviendra, α et β' étant constants

$$(19) \qquad Amq'_0 = M(\Sigma H + C)^s + q_0.$$

Construisant les courbes $q_0 = \text{c}^{\text{te}}$, on obtient, si C est positif, un graphique voisin, comme disposition, de celui que nous avons fait connaître [1].

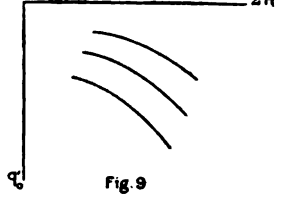


Fig. 9

On voit bien, comme cela est établi théoriquement plus loin (p. 139) qu'il faut prendre ici $s > 1$; l'hypothèse $s = 1$ donnerait un graphique formé de droites parallèles ; l'hypothèse $s < 1$ donnerait un graphique dont les courbes seraient convexes vers les q'_0 positifs, et non concaves.

[1] *C. R.*, Mai 1902 ; *Ann. des Ponts-et-Chaussées* et *Ann. Soc. Météor. de France*, 1902. On trouvera plus loin une extension de ces résultats à d'autres phénomènes hydrologiques, par exemple aux niveaux d'étiage.

CHAPITRE IV

—

ESSAI D'UNE THÉORIE MATHÉMATIQUE DU MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES NAPPES

On peut se proposer de constituer pour le mouvement de l'eau dans les nappes souterraines superficielles, dans les cas considérés ou dans d'autres, une théorie à peu près rigoureuse justifiant plus ou moins complètement certaines des hypothèses ou expliquant certaines des déductions précédentes, montrant par exemple la nécessité des lois expérimentales du régime non influencé de certaines sources, la façon dont les pluies influent sur le débit des sources et dont les crues se propagent dans les nappes souterraines.

Nous nous étions posés plus ou moins complètement cette catégorie de problèmes dans la première rédaction de notre mémoire (certains cas particuliers avaient été abordés antérieurement, Boussinesq, *Eaux courantes*, p. 1 et 252, peut-être Meurdra, Assoc. franc., congrès du Havre, 1877). Dans cette première rédaction nous avons déjà (8 mai 1903, voir introduction et ce qui suit) obtenu un assez grand nombre de résultats. Enfin M. Boussinesq a fait connaître depuis peu (juin-juillet 1903), presque exclusivement au sujet du régime propre, des solutions très remarquables, que nous mentionnerons tout-à-l'heure. Mais le sujet est loin d'être épuisé.

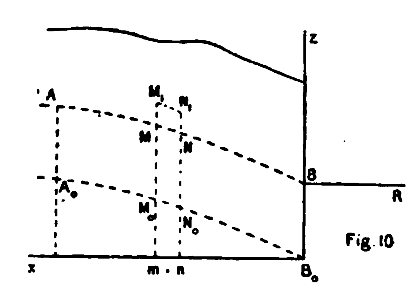


Fig. 10

Reprenons la figure 1, p. 8, chap. II.

Soit (1) $B_0 m = x$, et considérons une tranche $MmnN$ d'épaisseur $mn = dx$.

On a à peu près (2)

$$(20)\qquad \begin{cases} Q \equiv \varphi k (z - z_0) \dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ u = ki = k \dfrac{\partial z}{\partial x}, \end{cases}$$

(u vitesse moyenne dans MN, Q débit par unité d'épaisseur, k c^{te}, φ vide du terrain par unité de volume).

Si M est, au temps t, le point de la partie supérieure de la nappe située sur Mm, et d'abscisse x, N le point analogue d'abscisse $x - dx$, au temps $t + dt$, M sera venu en M_1 et N en N_1. Le volume qui a pénétré entre mM et nN par Mm est $(z - z_0)\,\varphi u dt$; le volume sorti par NN_0 est

$$(z - z_0)\,\varphi u dt - \varphi dt \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)u\right]dx.$$

La différence est égale à l'accroissement de volume

$$MNN_1M_1 = \varphi \frac{\partial z}{\partial t}\, dt dx.$$

Donc

$$(21)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)u\right] = \frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right].$$

C'est *l'équation fondamentale*, qui, pour le régime permanent, se réduit à l'équation de continuité déjà indiquée par Dupuit, et qui coïncide sensiblement, à la notation près, avec l'équation (ε) de la page 255 de l'essai sur la théorie des eaux courantes de M. Boussinesq.

(1) Dupuit. — *Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux*, etc., 2e édition, Paris, Dunod, 1863, p. 232; Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, p. 1 et 252. Les questions de mouvements permanents dans les nappes ou filtres ont déjà fait l'objet d'un certain nombre de travaux (Dupuit, etc.). Voir encore à ce sujet plus loin, p. 107.

(2) Les théories de Dupuit et de M. Boussinesq, et celles des Chap. suivants jusqu'au Chap. VI exclusivement, ne s'appliquent qu'aux nappes continues formées de matériaux poreux où l'eau peut circuler partout par des canaux capillaires. Au contraire, celles des Chap. II et III précédents s'appliquent aussi bien à ces nappes qu'aux nappes discontinues.

Nous avons considéré ici une nappe présentant une infinité de sections par des plans parallèles à peu près superposables ; mais on peut se dispenser de faire cette restriction. L'équation (21), devient alors, comme l'a montré M. Boussinesq [1], et avec nos notations

$$(22) \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(z-z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(z-z_0)\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

C'est l'équation indéfinie du problème.

De plus le débit doit généralement être nul aux parois (réelles ou fictives) qui sont supposées limiter la nappe, quand on suppose l'existence de ces parois.

Solutions exactes de M. Boussinesq. — En supposant à la sortie (point B ou analogue de la figure 10) z constant et égal à c, M. Boussinesq a pu aborder :

1° le cas où $z - c$ est très petit par rapport à $|c - z_0|$, z_0 pouvant être négatif. Le débit Q de la source est $Q = Ce^{-\alpha t}$ $(\alpha > 0)$, c'est-à-dire de la forme (12). Les graphiques (7) corrélatifs sont formés de droites passant par l'origine (comme pour la source de Cérilly, p. 158 et graph. 4). La source possède alors un régime propre comme celui que nous avons considéré précédemment. Les petites pluies uniformément réparties sur la nappe laissent subsister au bout d'un certain temps la forme $Q = Ce^{-\alpha t}$, en changeant seulement la valeur C. *Elles n'altèrent pas sensiblement cette forme, sauf pendant un temps limité.*

2° Le cas où $c = z_0 = 0$: (22) a des solutions de la forme $z = \frac{\zeta_0}{1+\alpha t}$, ζ_0 ne dépendant que de x et de y. Alors $Q = \frac{Q_0}{(1+\alpha t)^2}$. Les graphiques (7) corrélatifs sont ceux qui correspondent à la formule (ω) (p. 25).

3° Un autre cas : (22) a des solutions de la forme $z - c = \zeta T$, $c - z_0 = A\zeta$ $(A > 0)$

$$T = \frac{A}{e^{-A(t-t_0)} - 1},$$

[1] C. R., 22 juin 1903, p. 1513, form. (2) et J. de Math., 1904. Il faut dans la formule de M. Boussinesq, substituer $c - z_0$ à H, $z - c$ à h, k à $\frac{k}{\mu}$: c n'est autre que BB_0.

(A, t_0 c^{tes}, $t > t_0$, ζ fonction de x, y satisfaisant à une équation aux dérivées partielles). Le débit est de la forme

$$Q = BT(A + T) = B \frac{A^2}{(e^{-A(t-t_0)} - 1)^2} \cdot \quad e^{-A(t-t_0)}.$$

(B c^{te}). Quand on suppose A assez grand, cette expression est de la forme $Ee^{-A(t-t_0)}(1 + \varepsilon)$, où ε tend vers o avec $\frac{1}{t}$. C'est alors une loi très voisine de la loi (12), et qui pratiquement, paraît conduire encore à un graphique (7) formé de droites passant par l'origine.

Enfin M. Boussinesq a vérifié par une savante analyse que, dans les cas 2° et 3°, ses solutions sont stables : de petites perturbations sont forcément suivies du rétablissement du même régime. Pratiquement on conclura que, probablement, de petites pluies n'altèrent sensiblement ces régimes que pendant un temps assez limité [1].

Nous nous trouvons ainsi déjà en présence de beaux résultats théoriques tout à fait conformes à ceux que nous avons obtenus dans les chap. II et III. Il est possible encore, grâce aux équations (21) ou (22), de définir des cas étendus différents où la théorie conduit à la notion du régime propre pour une source, et à la forme (12) pour l'expression du débit. Mais, auparavant, nous allons résumer certains résultats obtenus par nous dans la première rédaction de notre Mémoire (8 mai 1903), moyennant, il est vrai, des hypothèses critiquables.

Cas d'une nappe à fond horizontal. — Les formules (1) à (6) nous donneront Q si nous pouvons calculer le volume V contenu dans la nappe.

Dans la première rédaction de notre Mémoire nous avions en fait, admis que l'on ne commettait pas de grosse erreur en calcu-

[1] En cours d'impressions, mentionnons de nouveaux résultats de M. Boussinesq, *Bull. des Sc. Math.*, mars 1904; C. R., 1904, 1er sem., janvier, février; 1904, 2e sem., août.

lant V, ou, plus exactement, $\frac{dV}{dQ} = f'(Q)$ ou $\frac{dV}{dt}$ [formule (5)] $= \frac{dV}{dQ}\frac{dQ}{dt}$, comme si, à chaque instant, le régime était permanent, c'est-à-dire en prenant

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \qquad \frac{z\partial z}{\partial x} = \mu(t), \qquad z^2 = 2\mu x + h^2,$$

μ étant proportionnel au débit au temps t. Nous obtenions ainsi pour le volume V, si L est la longueur de la nappe, Z l'ordonnée au sommet,

$$V = \varphi\int_0^L z dx = \frac{\varphi}{\mu}\int_h^Z z^2 dz = \varphi\,\frac{Z^3 - h^3}{3\mu};$$

si $\frac{Z}{h}$ est assez grand, ce qui qui a toujours lieu quand $h = 0$,

$$V = \varphi\,\frac{Z^3}{3\mu}(1+\varepsilon) = \varphi\,\frac{Z(2\mu L + h^2)}{3\mu}(1+\varepsilon) = \frac{2}{3}\varphi LZ(1+\varepsilon')$$
$$(\varepsilon' = 0 \text{ pour } h = 0).$$

Or, M. Boussinesq a publié ultérieurement dans ce cas (pour $h = 0$, une solution exacte [ainsi qu'on peut le vérifier directement, d'après (21)], en supposant, non plus comme nous $z = \sqrt{x}\,\psi(t)$, mais $z = \psi_1(x)\,\psi(t)$, ce qui lui permet de déterminer *exactement* $\psi_1(x)$. Il trouve

$$c\xi = c\frac{x}{L} = \int_0^{\eta}\frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}}, \qquad \text{où} \qquad \eta = \frac{z}{Z}, \qquad cd\xi = \frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}}.$$

Le volume total de la nappe est

$$V = \varphi\int_0^L z dx = \varphi\int_0^1 \eta\,ZL\,d\xi = \varphi\,\frac{ZL}{c}\int_0^1\frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1-\eta^3}}$$
$$= \varphi\,\frac{ZL}{c}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{1-\eta^3}\right)_0^1 = \frac{2}{3}\varphi\,\frac{ZL}{c}\,(^1)\,.$$

(1) D'ailleurs M. Boussinesq trouve pour le débit au collecteur la formule (formule (14), C. R., 1903, 2e sem., p. 7) $QL = \lambda Z^2$ (où λ est une constante), formule qui résulte aussi de $z^2 = 2\mu x + h^2$, quand $h = 0$, ou approximativement quand $\frac{Z}{h}$ est assez grand.

La constante c a été trouvée par M. Boussinesq égale à 0,862. L'erreur relative est donc assez peu considérable ; de plus, le fait que cette erreur ne consiste que dans la nécessité de l'introduction dans V du facteur $\frac{1}{c}$ (plus généralement d'un facteur constant) montre que les conséquences déduites par nous de la valeur $\frac{2}{3}\varphi LZ$ de V, vont subsister après introduction de la valeur exacte $\frac{2}{3}\varphi LZ$. Car il suffit de remplacer φ par $\frac{\varphi}{c}$, c'est-à-dire de supposer que le rapport, d'ailleurs pratiquement inconnu, du vide au volume total dans la nappe est un peu plus grand.

C'est ce que nous allons vérifier. On a

$$V = \frac{2}{3}\varphi\frac{LZ}{c} = f(Q)$$

(formule (2), puisque Z est fonction de Q, débit au collecteur). D'après (6)

$$\varphi_1'(Q) = \frac{f'(Q)}{Q},$$

$$f'(Q) = \frac{2}{3}\varphi\frac{L}{c}\frac{dZ}{dQ}.$$

Dans le cas de M. Boussinesq,

$$Z = \frac{M}{1+\alpha t}, \qquad (M \text{ c}^{te}), \qquad Q = \frac{A}{(1+\alpha t)^2},$$

$$Z = M_1\sqrt{Q}, \qquad (M_1 \text{ c}^{te}).$$

Dans le nôtre,

$$Z = \sqrt{2\mu L(1+\varepsilon'')}, \qquad (\varepsilon'' = 0, \text{ si } h = 0),$$

où μ est proportionnel à Q, c'est-à-dire que Z est de la même forme, par suite aussi $\frac{dZ}{dQ}$, $f'(Q)$, $\varphi'_1(Q)$. A un facteur constant près, les calculs sont identiques, et notre hypothèse conduit à la solution $Q = \frac{B}{(1+\alpha t)^2}$, et, par suite, à une courbe des débits et à un graphique (7) de même forme.

Etant donné que les constantes qui entrent dans les formules sont déterminées par les résultats connus pour Q, il est jusqu'ici indifférent d'employer les formules de M. Boussinesq ou les nôtres ; elles ne diffèrent que par les valeurs des constantes, qui ne sont pas connues *a priori*. On peut donc dire que notre méthode, bien que moins exacte que celle de M. Boussinesq, conduit à des résultats suffisants en vue de la pratique. Mais cette dernière peut évidemment lui être préférée, car elle est assez simple, et, de plus, les valeurs des constantes, plus rigoureuses, ne sont pas indifférentes en vue de certaines applications géologiques possibles.

Nous avons ici $Q = \frac{A}{(1 + \alpha t)^2}$. Nous avons vu alors (p. 26), que notre graphique (7) a ses courbes de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{Q_1}} - \frac{1}{\sqrt{Q_0}} = C_1(t_1 - t_0), \qquad (C_1 \text{ c}^{\text{te}}).$$

Ces courbes sont convexes.

Nous pouvons alors énoncer encore les propriétés suivantes, conséquences directes de cette forme d'équation (7), et que nous avions indiquées dans la première rédaction de notre mémoire :

Dans le cas où la nappe repose sur une surface imperméable horizontale, les courbes

$$\frac{1}{\sqrt{Q_1}} - \frac{1}{\sqrt{Q_0}} = C_1(t_1 - t_0) = C_1\tau, \qquad (C_1 > 0)$$

qui déterminent le débit Q_1, *un temps t après le moment correspondant au débit* Q_0, *dans la période de régime propre ou non influencé, sont convexes vers les* Q_1 *positifs, et leur coefficient angulaire est positif ; de plus, sur une même ordonnée, elles sont d'autant plus resserrées qu'elles sont plus voisines de l'axe des* Q_0 *(ou que t est plus grand). Quand* Q_0 *décroît, les distances de deux courbes voisines* $v = v_1$, $v = v_2$, *mesurées sur l'ordonnée, vont en diminuant.*

En effet, d'une part

$$\frac{1}{2}\frac{dQ_1}{Q_1^{\frac{3}{2}}} = C_1\,dt_1,$$

et $\frac{dQ_1}{dt}$ croît avec Q_1, décroît quand Q_1 diminue; d'autre part, si l'on suit une des courbes du graphique, Q_1 et Q_0 décroissent en même temps, en sorte que $\frac{dQ_1}{dt}$ diminue quand Q_0 diminue [1]

[1] Il arrive (ou il est arrivé) souvent que les Ingénieurs, soit en hydraulique, soit en résistance des matériaux, sont obligés, pour obtenir des solutions que la pratique réclame, de faire certaines hypothèses aidant à pousser les calculs jusqu'au bout. On parvient ainsi à des formules qui peuvent permettre de grouper et de discuter les résultats de l'expérience Ces formules peuvent être exactes ou à peu près exactes dans les limites de la pratique, grâce aux constantes non déterminées qu'elles renferment, ou encore grâce à un hasard heureux que peut aider plus ou moins fortement, il faut bien le dire, l'habileté et la science du calculateur. Mais, provisoirement, ces formules ne doivent être employées *que si l'expérience les vérifie suffisamment*, et elles constituent alors des formules d'interpolation, des formules d'ailleurs approchées dans de certaines limites, et qui, à ce dernier point de vue, sont aux formules vraies dans ces limites, c'est-à-dire dans un certain domaine (style de l'analyse mathématique) ce que les expressions asymptotiques des fonctions (fonction Γn par exemple) sont à la vraie valeur de celles-ci en analyse mathématique. Ces formules d'interpolation et ces expressions asymptotiques ont un caractère scientifique analogue. L'emploi des premières est d'autant plus justifié que, habituellement, le domaine où nous avons à étudier un phénomène est très limité, pratiquement, dans le temps ou l'espace.

Ces formules pourront encore avoir pour but, non de donner une idée approchée de la valeur exacte d'une quantité (interpolation proprement dite), mais une idée approchée d'une limite supérieure λ de cette quantité (résistance des matériaux, coefficient de sécurité). Or, pareil fait arrive à chaque instant dans l'algèbre et la théorie des nombres. Là, il est vrai, le calcul suffit à déterminer rigoureusement cette limite. En hydraulique ou en résistance des matériaux, au contraire, le résultat du calcul sera souvent une formule d'interpolation à vérifier expérimentalement pour λ, formule qui aura un véritable caractère scientifique *dans les limites où l'expérience la vérifie*.

Quant aux méthodes qui ont servi à obtenir ces formules d'interpolation, méthodes qui n'ont pas la rigueur exigée en mathématiques pures, ou en physique mathématique, elles constituent un moyen d'investigation puissant, souvent bien plus puissant que les méthodes rigoureuses. A ce titre, elles contribuent autant au progrès de la science, et, quand les résultats qu'elles donnent se trouvent vérifiés par l'expérience, et en partie nouveaux, *leur exposé nous paraît utile, nous dirons même indispensable*, pourvu qu'on n'en exagère pas la portée. Elles rendent, en effet, en vue de *la physique et de la pratique*, les mêmes services à la science que des méthodes rigoureuses. LEUR CLASSIFICATION SEULE *pourra être différente, en vue d'éviter la confusion : en hydraulique et en résistance des matériaux ces méthodes ne rentreront pas dans la mécanique rationnelle, mais dans la mécanique physique et expérimentale*, où elles ont un rôle analogue à celui qu'ont les instruments en astronomie. D'ailleurs, une fois les résultats expérimentaux trouvés, les mathématiciens s'en emparent et peuvent les établir plus rigoureusement, comme cela est arrivé souvent ; en sorte

Cas d'une nappe à fond rectiligne. — Dans la première rédaction de notre mémoire, en vue de calculer le volume V contenu dans la nappe, ou $\frac{dV}{dQ}$ ou $\frac{dV}{dt}$, nous avions encore admis, dans ce cas, que l'on ne commettait pas de grosse erreur, en les calculant comme si, à chaque instant, le régime était permanent, c'est-à-dire en prenant

$$(z - ax)\frac{\partial z}{\partial x} = \mu(t)$$

(a pente du fond), μ étant proportionnel au débit au temps t, ou encore

$$z - ax - \frac{\mu}{a} + \left(\frac{\mu}{a} - h\right) e^{\frac{a}{\mu}(h-z)} = 0\ (^1),$$

comme on peut le vérifier directement. Ici encore, il suffirait pour l'exactitude du graphique (7) déduit de cette hypothèse, que $\frac{\partial V}{\partial t}$ ou $\frac{\partial V}{\partial Q}$ fût à peu près exact.

Or nous prenons

$$V = \varphi \int_0^L (z - ax)dx = \varphi \int_0^L \zeta dx.$$

Soit z_1 l'ordonnée exacte ; $z_1 - ax = \zeta_1$. La vraie valeur de V

$$V_1 = \varphi \int_0^L \zeta_1 dx = \varphi \int_0^L \frac{\zeta_1}{\zeta}.\ \zeta dx.$$

que ces méthodes, qui fréquemment ont posé en partie le problème mathématique et ébauché la solution, contribuent aussi au progrès des sciences mathématiques.

Par exemple, ce sont les hypothèses critiquables et les calculs mentionnés dans les p. 37 à 45 qui nous ont conduits directement aux graphiques de prévision des sources de Cérilly et Armentières mentionnés plus loin (p. 158 et graph. 4 et 6), et qui ont été suivis des belles théories de M. Boussinesq sur les nappes souterraines. Mais rien ne prouve que le rôle de ces calculs soit épuisé, ou qu'ils ne peuvent en inspirer d'autres analogues également utiles. Il y a donc intérêt au point de vue scientifique à les faire connaître, au moins sommairement.

(1) C'est la solution de Dupuit, à la notation près, pour le régime permanent où $\mu = c^{te}$ [*Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux*, 2e édition, Paris, Dunod, 1863, p. 235, form. (2)].

On conçoit parfaitement, et c'est ce qui se présente dans le cas précédent pour $h = 0$, que l'on puisse avoir $C_1 V = V_1$, ou, mieux, $C_1 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V_1}{\partial t}$ (C_1 c^{te}), ou enfin que ceci puisse avoir lieu avec assez d'exactitude dans un domaine de variation limitée de Q, mais un domaine assez étendu pour que, pratiquement, les conclusions déduites de notre hypothèse soient suffisamment exactes (dans la pratique, en effet, le débit Q de la source ne varie qu'entre certaines limites).

Les conséquences déduites de l'hypothèse ci-dessus pour le calcul de $\frac{\partial V}{\partial t}$, après introduction d'un facteur c_1 de correction (ce qui revient à modifier la valeur de *la constante* φ généralement mal connue ou inconnue) peuvent donc parfaitement être assez exactes, d'autant plus que certaines sont conformes à l'analyse de M. Boussinesq (cas où $|z - ax|$ est grand par rapport à $|z - h|$) ou à l'expérience. Nous ne les établirons pas en détail, mais nous croyons indispensable de les énoncer :

Dans le cas où la nappe repose sur un plan imperméable de pente a, dans la période de régime propre, les courbes

$$v = \varphi_1(Q_0) - \varphi_1(Q_1) \tag{7}$$

jouissent des mêmes propriétés que quand $a = 0$ au point de vue de la convexité et de l'écartement.

La décroissance du débit, que a soit nul ou $\neq 0$, sera d'autant plus lente que la longueur de la nappe est plus grande. Autrement dit, les sources basses sont plus pérennes que les sources hautes (¹).

Quand $a \neq 0$, si la longueur L *de la nappe est suffisamment grande par rapport à h, cette décroissance sera d'autant plus rapide que a est plus grand. Les courbes* (7) *se confondent approximativement avec le système de droites $Q_1 = CQ_0$ passant par l'origine. Plus exactement, ces courbes ont, pour $\frac{L}{h}$ assez grand, leur équation de la forme*

$$m(t - t_0) = \frac{\mu - \mu_0}{a^3} - \frac{L}{a} \log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) + \varepsilon_1, \quad (mc^{te} > 0).$$

(¹) Belgrand. — *La Seine*, études hydrologiques, Paris, 1872, p. 95.

où ε_1 petit, μ proportionnel au débit Q de la source au temps t. Quand $\frac{L}{a^2\mu_0}$ reste assez grand, ou encore quand μ et μ_0 sont assez petits,

$$m(1 + \varepsilon_2)(t - t_0) = \frac{L}{a}(\log \mu_0 - \log \mu),$$

ou

$$Q = Q_0 e^{-\frac{am}{L}(t-t_0)(1+\varepsilon_2)}, \quad (\varepsilon_2 \text{ petit}).$$

Les courbes (7) sont à peu près des droites passant par l'origine.

Tous ces résultats sont conformes à des résultats pratiques connus (sauf l'ignorance où l'on est, en général, de la forme du fond des nappes) ; en particulier, la dernière forme de μ, qui coïncide avec la forme (12), est semblable à celle qui résulte pour la source de Cérilly (Vanne) du graphique indiqué plus loin (v. p. 158 et graph. 4), ou encore à des résultats d'ordre mathématique indiqués par M. Boussinesq (C. R., 22 juin 1903) et par nous (v. plus loin, p. 49).

Stabilité des régimes précédents. — De nos hypothèses sur la manière de calculer $\frac{dV}{dt}$, en admettant que la forme de la surface libre fût suffisamment voisine de celle qui a lieu dans le mouvement permanent correspondant au débit, au collecteur, au temps t, nous avions encore, dans la première rédaction de notre mémoire, déduit des conséquences sur la stabilité du régime dans les deux cas qui précèdent (fond rectiligne horizontal ou suffisamment incliné).

D'abord Dupuit avait établi pour le mouvement permanent que, à l'amont d'un point z_1, où une perturbation accidentelle se produit, le régime est stable vers l'amont, c'est-à-dire que l'influence de cette perturbation tend à disparaître quand on s'éloigne vers l'amont ; car il avait montré l'analogie qui existe dans ce cas entre les cours d'eau et les nappes ou masses filtrantes où le régime per-

manent est réalisé (*Etudes* citées). Notre hypothèse sur la forme approximative de la surface libre étendait de suite la conséquence de Dupuit aux régimes considérés par nous. Le calcul direct nous avait permis de le vérifier et d'énoncer la propriété sous cette forme : *Les perturbations accidentelles, supposées légères, mais permanentes, qui se produisent en un point situé vers l'aval, n'ont sur le régime qu'une influence de plus en plus faible quand on considère des points situés de plus en plus vers l'amont. Le régime est stable vers l'amont.*

Nappes à régime propre permanent. — Ne peut-on trouver une nappe à fond convenable, susceptible d'un régime tel qu'aucune chute de pluie uniforme n'altère le régime de cette nappe, ou, plus exactement, ait pour effet de rétablir l'état qu'avait cette nappe un certain temps auparavant ?

Si
$$z = z_0 + \zeta_1$$
est l'ordonnée à un moment quelconque t,
$$z = z_0 + \zeta_1 + \psi_1$$
était l'ordonnée un certain temps θ_1 auparavant ψ_1 dépendant de θ_1 seul : $\psi_1 =$ fonction de θ_1.

En particulier, la décroissance du niveau z pendant le temps dt est indépendante de x et y (équations (21) et (22)), c'est-à-dire ne dépend que de t. On aura donc
$$z = z_0 + \zeta_2 + \psi$$
où ζ_2 ne dépend pas de t, et où ψ ne dépend que de t. Nous allons chercher les nappes satisfaisant à cette dernière condition.

1° *Cas de l'équation* (21). — On aura, d'après (21)
$$\psi' = k\frac{\partial}{\partial x}\left[(\zeta_2 + \psi)\left(\frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right)\right],$$
$$\frac{\psi'}{k} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta_2\left(\frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right)\right] + \psi\left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2}\right].$$

Comme nous ne supposons pas le niveau constant, nous devons admettre que ψ est fonction de t, et non constant. Mais ψ' pourra ou non dépendre de t :

1° ψ' dépend de t; on a

$$\zeta_2\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}+\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right)=\theta(x),$$

$$\frac{\psi'}{k}=\frac{d\theta}{dx}+\psi\,\frac{d^2(z_0+\zeta_2)}{dx^2},$$

$$\psi=\frac{\psi'}{\frac{kd^2(z_0+\zeta_2)}{dx^2}}-\frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{d^2(z_0+\zeta_2)}{dx^2}},$$

et, en dérivant par rapport à t,

$$\psi'=\frac{\psi''}{\frac{kd^2(z_0+\zeta_2)}{dx^2}},$$

$$\frac{d^2(z_0+\zeta_2)}{dx^2}=\frac{\psi''}{k\psi'}=2c, \qquad (c \text{ c}^{\text{te}}),$$

$$z_0+\zeta_2=a+bx+cx^2.$$

$$\frac{\psi'}{k}-2c\psi=\frac{d\theta}{dx}=C_2=\text{c}^{\text{te}},$$

$$\theta=C_2x+C_3=\zeta_2(b+2cx),$$

$$\zeta_2=\frac{C_2x+C_3}{b+2cx}.$$

De plus, comme on le vérifie directement,

$$\psi=Ae^{2kct}-\frac{C_2}{2c}.$$

Le débit Q est proportionnel à

$$(\zeta_2+\psi)\frac{d(z_0+\zeta_2)}{dx}=\left(\frac{C_2x+C_3}{b+2cx}+\psi\right)(b+2cx),$$

et

$$Q=A_1\,[C_2x+C_3+\psi\,(b+2cx)], \qquad (A_1>0)$$

Finalement on a la solution indéfinie

$$(22_1)\quad \begin{cases} z_0 + \zeta_2 = a + bx + cx^2, & \zeta_2 = \dfrac{C_2 x + C_3}{b + 2cx}, \\ \psi = Ae^{2kct} - \dfrac{C_2}{2c}, \\ z = a + bx + cx^2 + \psi, \\ Q = A_1 \left[C_2 x + C_3 + \psi (b + 2cx)\right]. \end{cases}$$

Ici $\frac{\partial z}{\partial x} = b + 2cx \geqslant 0$, si le débit se fait toujours vers le collecteur; ψ ne peut alors croître indéfiniment avec t, et $c < 0$ ($c \neq 0$, le niveau étant variable avec le temps), $A > 0$. *La surface libre est ici une parabole convexe vers les z positifs.*

Cette parabole a son sommet au point $x = L$ où

$$\frac{\partial z}{\partial x} = b + 2cx = 0, \qquad b + 2cL = 0, \qquad b > 0.$$

α) Si l'origine amont de la nappe est fixe, on doit y avoir $b + 2\,cx = 0$, théoriquement, car le débit doit y être nul quel que soit t; donc

$$C_2 L + C_3 = 0, \qquad \frac{C_2}{C_3} = \frac{2c}{b}, \qquad \zeta_2 = c^{te}.$$

Dans ce cas on obtient la solution rigoureuse (¹),

$$(22_2)\quad \begin{cases} z_0 = a_1 + bx + cx^2, & \psi_1 = Ae^{2kct}, \qquad c < 0, \\ z = a_1 + bx + cx^2 + \psi_1, \\ Q = A_1 (b + 2\,cx)\,\psi_1. \end{cases}$$

Au collecteur ($x = 0$)

$$Q_{x=0} = A_1\, b\, \psi, \qquad z = a_1 + \psi_1.$$

Les variations du niveau et du débit dans la nappe se retrouveront dans celui du collecteur. La hauteur ψ_1 d'eau en chaque point de la nappe est, à chaque instant, indépendante de x. Une

(¹) Pour établir l'accord avec la fig. 1 on prendra, pour $x = 0$, $z_0 + \zeta_2 = 0$ dans (22_1), $a_1 = 0$ dans (22_2). Mais on peut aussi supposer que l'on ait au préalable changé dans (21) z et z_0 en $z + \lambda$, et $z_0 + \lambda$, (λ constante convenable).

chute de pluie amenant à la nappe au temps t_1 une hauteur d'eau constante χ va changer z en

$$z + \chi = a_1 + bx + cx^2 + Ae^{2\,kct_1} + \chi,$$

et

$$Ae^{2kct_1} + \chi = Ae^{2kc\,(t_1 - \theta_1)},\ \theta_1 > 0.$$

A partir du temps t_1, on a la solution rigoureuse possible

$$z_1 = a_1 + bx + cx^2 + Ae^{2kc\,(t-\theta_1)}$$

qui est de la même forme ; à chaque nouvel instant t les niveaux redeviennent ce qu'ils étaient un temps θ_1 auparavant.

Il semble que ce régime soit susceptible d'être à peu près réalisé sur la plus grande partie de la nappe, au moins à une certaine distance du collecteur. Si, en effet, la nappe a une certaine pente, il semble d'abord admissible que les variations de niveau du collecteur n'auront d'influence sur les niveaux dans la nappe qu'à une distance limitée de ce collecteur. D'autre part, les hauteurs annuelles de pluie qui tombent dans la plus grande partie du bassin de la Seine ne dépassent pas $0^m,60$ à $0^m,80$ par an (597 millimètres à Troyes, 660 à Coulommiers) ; une partie de cette eau est absorbée par l'évaporation et la végétation. Il n'y aurait rien d'extraordinaire à ce que des variations corrélatives aux pluies fussent réalisées à la fois dans les niveaux pour la nappe et au voisinage du collecteur ; il pourra donc arriver dans certaines circonstances que le collecteur soit à peu près réglé de façon à satisfaire aux conditions trouvées pour $x = 0$. Finalement :

Pour une nappe dont le fond est une parabole convexe vers le haut, d'équation $z = a + bx + cx^2$, ($c < 0$, $b > 0$), il existe un régime (1) *qu'aucune pluie uniformément répartie n'altère : la hauteur au-dessus du fond y est indépendante de x ; dans les périodes où les pluies n'arrivent pas à la nappe, le débit y est*

(1) Dans un cas particulier, quand on fait des hypothèses restrictives sur la forme de la parabole (sommet très inférieur au niveau à l'origine du collecteur), le résultat obtenu, au moins pour la forme de Q, rentre dans un résultat indiqué par M. Boussinesq (*C. R.*, 22 juin 1903).

donné [1] *par* $Q = A_2 (b + 2cx) e^{2kct} (A_2 > 0)$, *et le régime a le caractère du régime propre. Le graphique (7) corrélatif est formé de droites passant par l'origine.*

Cette nappe possède UN RÉGIME PROPRE PERMANENT.

β) L'origine amont de la nappe est variable. Q s'annule pour une valeur de x qui varie avec le temps. L'origine amont de la nappe, située au point $x = L_1 \leqslant L$, est variable, et le débit y est nul parce que $\frac{\partial z}{\partial x}$ y est fini, et que $z - z_0$ y est nul. Dans ce cas nous obtenons une nouvelle solution rigoureuse.

Pour $x = L$, $b + 2cL = 0$, $C_2 L + C_3 < 0$, car, pour $x = 0$, $Q > 0$, et $\zeta_2 (L) = -\infty$, $z_{0_{x=L}} = +\infty$ [2]. Ici

$$C_2 L_1 + C_3 + \psi (b + 2cL_1) = 0,$$

$$\frac{dz_0}{dx} = b + 2cx - \frac{C_2 (b + 2cx) - 2c (C_2 x + C_3)}{(b + 2cx)^2}$$

$$= (b + 2cx) \left[1 - \frac{C_2 b - 2c C_3}{(b + 2cx)^3} \right];$$

$$\frac{d^2 z_0}{dx^2} = 2c \left[1 + 2 \frac{C_2 b - 2c C_3}{(b + 2cx)^3} \right].$$

Ici, $b + 2cL = 0$, $C_2 b - 2c C_3 = -2c (C_2 L + C_3) < 0$.

Donc $\frac{dz_0}{dx}$ est positif et ne peut s'annuler quand x varie entre o et L. On a

$$\frac{d^2 z_0}{dx^2} = 2c \left[1 - \frac{4c (C_2 L + C_3)}{(b + 2cx)^3} \right],$$

qui s'annulera seulement, x variant entre o et L, quand $b^3 > 4c (C_2 L + C_3)$, pour une certaine valeur positive $x = x_1$ telle que

$$b + 2cx_1 = 2c (x_1 - L) = \sqrt[3]{4c (C_2 L + C_3)}.$$

(1) A condition bien entendu que les pluies précédentes aient été uniformément réparties dans la nappe.

(2) Le cas où $C_2 L + C_3 > 0$ paraît peu admissible, d'après la forme du fond.

Si

$$b^2 = (-2cL)^2 > 4c\,(C_2L + C_3),$$

ou

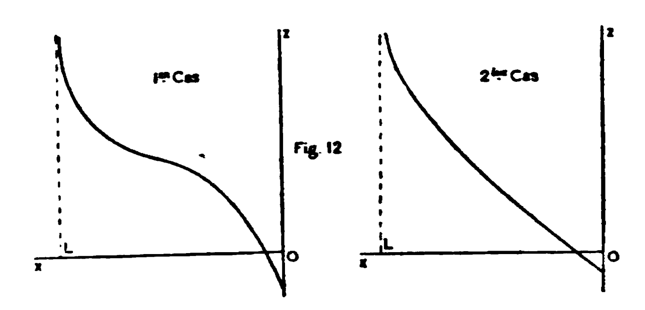
$$2c^2L^2 + C_2L + C_3 > 0,$$

$\frac{d^2z_0}{dx^2}$ est d'abord négatif, s'annule pour $x = x_1$, puis devient > 0, et croît indéfiniment lorsque x varie de 0 à L. La courbe est d'abord convexe, puis concave.

Si

$$2c^2L^2 + C_2L + C_3 < 0,$$

$\frac{d^2z_0}{dx^2}$ reste toujours de même signe et > 0. La courbe est concave [1].



L_1 est donné par l'équation

$$(C_2 + 2c\psi)L_1 + C_3 + b\psi = 0$$

ou

$$2\,cL_1Ae^{2kct} + C_3 - 2\,cL\left(Ae^{2kct} - \frac{C_2}{2\,c}\right) = 0,$$

$$2\,cL_1 + \frac{C_3 + C_2L}{A}\,e^{-2kct} - 2\,cL = 0.$$

(1) Il est bien évident que, pratiquement, on ne devra assimiler au fond d'une nappe naturelle que la partie de ces courbes comprise entre o et L — ε (ε nombre positif convenable).

Quand t croît, $L_1 = L - \frac{C_3 + C_2 L}{2 Ac} e^{-2kct}$ décroît ; la longueur mouillée de la nappe diminue ; L_1 finira par se réduire à o, si des pluies ne surviennent pas.

Ici, pour une pareille nappe, une pluie uniformément répartie tombant dans la partie où le débit n'est pas nul pourra fort bien rétablir à peu près le régime tel qu'il existait un certain temps auparavant ; mais, si la pluie tombe sur toute la nappe, il n'en sera plus de même, au moins pendant un certain temps. Le régime propre n'est plus absolument permanent.

D'où ce résultat :

Soit une nappe dont le fond a pour équation

$$z_0 = a + bx + cx^2 - \frac{C_2 x + C_3}{b + 2cx}, \qquad (c < 0, b > 0)$$

dans la partie comprise entre $x = 0$ et $x = L$ ($b + 2cL = 0, x = L$ *sommet de la parabole* $z_1 = a + bx + cx^2$).

Pour cette nappe il existe un régime où l'abaissement du niveau en un point quelconque pendant le temps dt est indépendant de x : la forme de la surface libre est donnée par la formule

$$z = a + bx + cx^2 + Ae^{2kct} - \frac{C^2}{2c};$$

le débit, dans les périodes où les pluies n'arrivent pas à la nappe par

$$Q = A_1 \left[C_2 x + C_3 + (b + 2cx) \left(Ae^{2kct} - \frac{C_2}{2c} \right) \right],$$

à condition de ne prendre que les valeurs positives de Q

$$(A, A_1 > 0, C_2 L + C_3 < 0).$$

Le graphique (7) *corrélatif* [1] *est formé de droites passant toutes par un point fixe.*

[1] On a, pour $x = 0$, $Q_0 = A_3 e^{2kct_0} - B$, $Q_1 = A_3 e^{2kct_1} - B$,

$$\frac{Q_0 + B}{Q_1 + B} = e^{2kc(t_0 - t_1)}.$$

Ce graphique (7) est formé des droites $\frac{Q_0 + B}{Q_1 + B} = c^{te}$, qui passent toutes par le point $Q_0 = -B$, $Q_1 = -B$. Le coefficient angulaire de ces droites est compris entre 0 et 1 (Q_0 abscisse, $t_0 < t_1$).

Quand x varie entre o et L, $\frac{dz_0}{dx}$ est toujours positif; si

$$2c^2L^3 + C_2L + C_3 > 0,$$

le fond est d'abord convexe, puis concave; si

$$2c^2L^3 + C_2L + C_3 < 0,$$

le fond est concave; dans les deux cas, le fond est asymptote à $x = L$ vers $z = +\infty$. La longueur mouillée de la nappe diminue quand t croît, et son épaisseur est nulle à l'origine amont.

Le mouvement de la surface libre est celui d'une parabole indéformable dont tous les points se déplacent par un mouvement de translation parallèle à Oz.

γ) Pratiquement, il pourra suffire de supposer que le débit est très-petit pour $x = L$ (sommet de la parabole $z = a + bx + cx^2$); on peut considérer les solutions ainsi obtenues comme approximatives. Ce sera par exemple le cas d'une nappe qui reçoit à son origine quelques eaux d'infiltration par un procédé quelconque. D'après (22_1), $C_2L + C_3 = \varepsilon$, et, pour $x = L$, $Q = A_1\varepsilon$, $\zeta_2 = \pm\infty$.

Le fond présentera aux environs de $x = L$ une branche infinie asymptote à $x = L$, c'est-à-dire pratiquement un escarpement brusque et important, ou une dénivellation analogue, quand x est voisin de L. Nous n'insistons pas.

2° ψ' ne dépend pas de t; nous ne supposerons pas ψ constant. Donc $\psi = At + B$, $\psi' = A \neq 0$.

$$\frac{\partial^2(z_0 + \zeta_2)}{\partial x^2} = 0, \qquad z_0 + \zeta_2 = a + bx,$$

$$\frac{A}{k} = b\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}, \qquad \zeta_2 = \frac{A}{kb}x + \lambda.$$

Le fond est rectiligne comme la surface libre. Le débit est proportionnel à $(\zeta_2 + \psi)\frac{\partial(z_0 + \zeta_2)}{\partial x} = b\left(\frac{A}{kb}x + \lambda + \psi\right)$. Ce débit peut être nul au point où $\zeta_2 + \psi = 0$. L'origine de la nappe sera variable, et il n'y aura pas de régime propre permanent : nous reviendrons sur ce cas plus loin (p. 66).

Donc, finalement :

La nappe à fond parabolique convexe

$$z = a + bx + cx^2 \ (c < 0,\ b > 0)$$

est la seule susceptible d'un régime propre permanent, que ne troublent pas les pluies uniformément réparties, lorsque l'équation (21) *est applicable.*

2° *Cas de l'équation* (22). — Nous nous bornerons ici au cas où l'on suppose $\zeta_2 = c^{te}$, c'est-à-dire où la hauteur au-dessus du fond ne dépend que de t. En ajoutant une constante à ψ, on pourra toujours supposer $\zeta_2 = 0$.

(22) devient, d'après $z = z_0 + \psi$,

$$\frac{1}{k}\psi' = \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right)\psi\,;$$

d'où

$$\frac{\psi'}{k\psi} = \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 2c, \text{ avec } \psi' \neq 0,\ c \neq 0,$$

$$\psi = Ae^{2kct}, \ (c\ c^{te} \text{ négative}).$$

D'autre part :

$$2c = \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}.$$

Si

$$z_0 = \lambda\,(x^2 + y^2) + \zeta_0,$$

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} - 2c = 4\lambda - 2c + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = 0\,;$$

prenant $\lambda = \frac{c}{2}$,

$$z_0 = c\,\frac{x^2 + y^2}{2} + \zeta_0\,;$$

ζ_0 est défini par

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = 0$$

équation dont la solution générale est

$$\zeta_0 = f(x + yi) + f_1\,(x - yi),$$

(f, f_1 fonctions arbitraires).

Nous croyons inutile après ce qui précède de discuter en détail cette solution : nous savons qu'elle a des formes acceptables, en particulier dans le cas du cylindre $z = a + bx + cx^2$.

Nous indiquerons encore sommairement la forme du fond quand ce fond est de révolution, la nappe étant limitée par 2 plans méridiens. Alors

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} = 0,$$

Ici

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \theta^2} = 0,$$

et

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho}\right) = \left(\rho \frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho}\right)' = 0.$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} = \frac{C_1}{\rho}, \qquad \zeta_0 = C_1 \log \rho + C_2,$$

$$z_0 = \frac{c\rho^2}{2} + C_1 \log \rho + C_2.$$

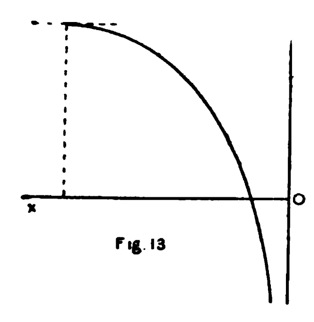


Fig. 13

L'origine amont de la nappe ici sera forcément fixe ; si l'on y a

$$\rho = L,$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial \rho} = c\rho + \frac{C_1}{\rho},$$

et

$$cL^2 + C_1 = 0, \qquad C_1 > 0, \text{ car } c < 0.$$

Pour

$$\rho = 0, \; z_0 = -\infty. \qquad \frac{\partial^2 z_0}{\partial \rho^2} = c - \frac{C_1}{\rho^2} < 0;$$

le fond a sa méridienne convexe et de la forme ci-contre.

Propriété remarquable de la nappe à régime propre permanent. — Reprenons les raisonnements qui nous ont conduit à l'équation (21) en admettant que la nappe reçoive à chaque instant pendant le temps dt au point d'abcisse x un apport superficiel $\chi\, dx\, dt$: (21) est remplacé par

$$\varphi dt \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\, k \frac{\partial z}{\partial x}\right] dx = \varphi \frac{\partial z}{\partial t}\, dt\, dx - \chi\, dt\, dx,$$

ou

$$\text{(21 bis)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\chi}{k\varphi}.$$

Cherchons encore une solution de la forme $z = z_0 + \psi$, où ψ ne dépend que du temps t :

$$\psi \frac{d^2 z_0}{dx^2} = \frac{\psi'}{k} - \frac{\chi}{k\varphi}.$$

Si ψ ne dépend que de t,

$$\frac{d^2 z_0}{dx^2} = 2c\,(c\,c^{te}),$$

$$2c\psi = \frac{\psi'}{k} - \frac{\chi}{k\varphi},$$

$$\psi = e^{2kct}\left[C + \frac{1}{\varphi}\int_{t_0}^{t} \chi e^{-2kct}\, dt\right];$$

Supposons, pour simplifier, χ constant,

$$\psi = A\, e^{2kct} - \frac{\chi}{2ck\varphi},$$

$$Q = B\psi \frac{\partial z}{\partial x} = B\psi \frac{dz_0}{dx} = B\psi\,(b + 2cx),$$

$$z_0 = a + bx + cx^2.$$

Il convient de supposer ici que Q reste fini, c'est-à-dire

$$c < 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} > 0,$$

et par suite $b > 0$. La nappe a son fond parabolique convexe et est à régime propre permanent. Quand t croit indéfiniment, le débit tend en chaque point à devenir constant et proportionnel à χ. Si au début des pluies χ le débit de la source était assez faible, c'est-à-dire si l'augmentation de débit due aux pluies est suffisamment notable, on voit que Q varie relativement peu à partir de ce début.

Pour les nappes douées d'un régime propre permanent à fond parabolique convexe, il existe un régime où une pluie uniformément répartie dans l'étendue de la nappe et le temps, pendant la période où les pluies profitent à la nappe, tend à réaliser un débit constant proportionnel à l'intensité de ces pluies et à la longueur L *de la nappe (car $b = -2\,c$L). Le régime tendrait alors à devenir uniforme si les pluies se prolongeaient suffisamment.*

On trouve bien pour la source de Cérilly en hiver une loi ayant quelque analogie avec celle-ci, puisque le débit y est souvent peu variable pendant environ 6 mois (1er semestre) [1].

D'autre part on voit que le débit à la fin de la période des pluies χ dépendra en tout cas, d'une part du débit avant le début de la période des pluies χ, d'autre part des pluies pendant cette période. Mais cette dernière propriété ne paraît aucunement devoir être spéciale aux nappes à fond parabolique convexe (p.33, par exemple). De toutes façons l'on en trouvera, dans la partie pratique, une vérification expérimentale, croyons-nous, suffisante (voir plus loin, p. 156).

Autres solutions exactes de l'équation (21). — Considérons encore l'équation

$$\text{(21)} \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta \frac{\partial (z_0 + \zeta)}{\partial x}\right],$$

où

$$\zeta = z - z_0.$$

[1] C'est le calcul précédent qui nous a conduit à cette remarque expérimentale.

Cette équation développée donne

$$\frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta \frac{dz_0}{dx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right).$$

On peut satisfaire à cette équation en cherchant des solutions communes à

$$\frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta \frac{dz_0}{dx}\right), \tag{23}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 0. \tag{24}$$

Posons

$$\zeta \frac{dz_0}{dx} = v, \qquad \frac{\partial \zeta}{dt} = \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{dz_0}{dx}}; \tag{25}$$

(23) donne

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{dz_0}{dx}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{f'(x)}\frac{\partial v}{\partial x},$$

si

$$k \frac{dz_0}{dx} f'(x) = 1. \tag{26}$$

On intègre l'équation précédente en posant

$$\frac{dt}{1} = -f'(x)\,dx, \qquad \log C = f(x) + t.$$

La solution générale de (23) est

$$v = \Psi(t + f(x)), \qquad \zeta = kf'(x)\,\Psi(t + f(x)). \tag{27}$$

La solution générale de (24) est

$$\zeta^2 = x\varphi(t) + \psi(t). \tag{28}$$

Il faut encore trouver les valeurs de (27) et (28) qui sont identiques. Or soit

$$k\Psi(U) = H'(U), \tag{29}$$

$$\left\{\begin{aligned} & kf'(x)\Psi(t+f(x)) = f'(x)H'(t+f(x)) \\ & = \frac{\partial}{\partial x} H(t+f(x)) = \sqrt{x\varphi(t)+\psi(t)} \\ & H(t+f(x)) = \int \sqrt{x\varphi(t)+\psi(t)}\,dx + \sigma(t). \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Quand $\varphi(t) \neq 0$,

$$\int \sqrt{x\varphi + \psi}\,dx = \frac{2}{3\varphi}(x\varphi+\psi)^{\frac{3}{2}},$$

$$H(t+f(x)) = \frac{2}{3\varphi}(x\varphi+\psi)^{\frac{3}{2}} + \sigma(t). \tag{31}$$

Posons

$$f(x) = y, \qquad x = F(y), \qquad \text{car } f(x) \neq c^{te}, \tag{32}$$

$$H(t+y) = \frac{2}{3\varphi}[\varphi F(y)+\psi]^{\frac{3}{2}} + \sigma(t). \tag{33}$$

On aura

$$H'_t = H'_y,$$

$$-\frac{2\varphi'}{3\varphi^2}[\varphi F(y)+\psi]^{\frac{3}{2}} + \sigma' + \frac{2}{3\varphi}\cdot\frac{3}{2}(\varphi' F(y)+\psi')(\varphi F(y)+\psi)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3\varphi}[\varphi F(y)+\psi]^{\frac{1}{2}}\varphi F'(y),$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} & -2\varphi'[\varphi F(y)+\psi]^{\frac{3}{2}} + 3\varphi^2\sigma' + 3\varphi(\varphi' F(y)+\psi')(\varphi F(y)+\psi)^{\frac{1}{2}} \\ & = 3\varphi^2 F'(y)[\varphi F(y)+\psi]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

La discussion complète de cette équation donnerait toutes les solutions, quand $\varphi \neq 0$, c'est-à-dire les valeurs de $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $F(y)$, $f(x)$, z_0. Quand $\varphi(t) = 0$, la méthode est semblable.

Nous nous contenterons de signaler 2 solutions relativement particulières.

1° Posons $\varphi(t) = 0$. On a

$$\zeta^2 = \psi(t). \tag{28bis}$$

C'est le cas étudié p. 47-48 (form. 22_2) : nous n'y revenons pas.

2° $\varphi(t) \neq 0$ et

$$\zeta^2 = (ax + b)\,\psi_1^2(t).$$

(où a et b sont des constantes, et $a \neq 0$, puisque $\varphi(t) \neq 0$). D'après (33)

$$H(t+y) = \frac{2}{3a\psi^2_1}\left[a\psi^2_1 F(y) + b\psi^2_1\right]^{\frac{3}{2}} + \sigma$$

$$= \frac{2\psi_1}{3a}\left[aF(y) + b\right]^{\frac{3}{2}} + \sigma.$$

$$H'_t = H'_y,$$

$$\sigma' + \frac{2\psi'_1}{3a}\left[aF(y) + b\right]^{\frac{3}{2}} = \psi_1\left[aF(y) + b\right]^{\frac{1}{2}} F'(y).$$

Posons

$$\left[aF(y) + b\right]^{\frac{3}{2}} = F_1(y),$$

$$\sigma + \frac{2\psi_1}{3a} F_1(y) = H(t+y),$$

$$\sigma' + \frac{2\psi'_1}{3a} F_1(y) = H'_t = H'_y = \frac{2\psi_1}{3a} F'_1(y),$$

$$F_1(y) = \frac{\psi_1}{\psi'_1} F'_1(y) - \frac{3a\sigma'}{2\psi'_1}. \tag{34bis}$$

Si

$$\frac{\psi_1}{\psi'_1} = \psi_2,$$

par dérivation,

$$F'_1(y) = \psi_2 F''_1(y),$$

$$\frac{F''_1(y)}{F'_1(y)} = \psi_2^{-1} = C = c^{te},$$

$$\log F'_1(y) = Cy + C_1,$$

$$F'_1(y) = e^{Cy+C_1}, \qquad F_1(y) = \frac{1}{C} e^{Cy+C_1} + C_2;$$

$$\frac{\psi_1'}{\psi_1} = C, \qquad \log \psi_1 = Ct + C_3, \qquad \psi_1 = e^{Ct+C_3};$$

Portant dans (34bis),

$$\frac{e^{Cy+C_1}}{C} + C_2 = \frac{e^{Cy+C_1}}{C} - \frac{3a\sigma'}{2Ce^{Ct+C_3}},$$

$$\sigma'(t) = -\frac{2CC_2}{3a} e^{Ct+C_3}.$$

$$F_1(y) = \left[aF(y) + b\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{e^{Cy+C_1}}{C} + C_2,$$

$$(ax+b)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{C} e^{Cf(x)+C_1} + C_2,$$

d'après (32);

$$Cf(x) + C_1 = \log\left[C(ax+b)^{\frac{3}{2}} - CC_2\right],$$

$$Cf'(x) = \frac{\frac{3}{2} Ca\sqrt{ax+b}}{C(ax+b)^{\frac{3}{2}} - CC_2} = \frac{C}{k\frac{dz_0}{dx}},$$

d'après (26);

$$\frac{dz_0}{dx} = \frac{2}{3ak\sqrt{ax+b}}\left[C(ax+b)^{\frac{3}{2}} - CC_2\right]$$

$$= \frac{2C}{3ak}(ax+b) - \frac{2CC_2}{3ak\sqrt{ax+b}},$$

$$z_0 = \frac{C}{3ak}(ax^2 + 2bx + \gamma) - \frac{4CC_2}{3a^2k}(ax+b)^{\frac{1}{2}}.$$

Le débit Q est

$$Q = A_1\psi_1(t)\sqrt{ax+b}\left[\frac{dz_0}{dx} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]$$

$$= A_1\psi_1(t)\sqrt{ax+b}\left[\frac{2\,C}{3\,ak}(ax+b) - \frac{2\,CC_2}{3\,ak\sqrt{ax+b}} + \frac{a\psi_1(t)}{2\sqrt{ax+b}}\right]$$

$$= A_1\psi_1(t)\left[\frac{2\,C}{3\,ak}(ax+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2\,CC_2}{3\,ak} + \frac{a\psi_1(t)}{2}\right].$$

Si l'on suppose $\psi_1(t)$ non constant, c'est-à-dire $C \neq 0$, ce débit Q ne sera rigoureusement nul pour aucune valeur de x indépendante de t ; mais on aura un débit aussi petit qu'on veut pour $x = L$, c'est-à-dire une solution voisine de la solution réelle, si Q est toujours très petit pour $x = L$; on prendra pour cela

$$(aL + b)^{\frac{3}{2}} = C_2,$$

$$|\,a\psi_1^2(t)\,| = |\,ae^{2C_3+2Ct}\,|$$

très petit quel que soit $t > 0$, $C < 0$, $|\,ae^{2C_3}\,|$ très petit.

Finalement nous obtiendrons la solution approximative :

$$(34^{ter})\quad\left\{\begin{aligned} & z_0 = \frac{C}{3\,ak}\left[ax^2 + 2\,bx + \gamma - \frac{4\,C_2}{a}\sqrt{ax+b}\right], \qquad C_2 = (aL+b)^{\frac{3}{2}}, \\ & \zeta = z - z_0 = \sqrt{ax+b}\;e^{Ct+C_3}, \qquad C < 0, \qquad |a|e^{2C_3} \text{ très petit}, \\ & Q = A_1 e^{Ct+C_3}\left\{\frac{2\,C}{3\,ak}\left[(ax+b)^{\frac{3}{2}} - (aL+b)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{a}{2}e^{Ct+C_3}\right\}, \end{aligned}\right.$$

la nappe étant comprise entre $x = 0$ et $x = L$.

Voyons quelle est sa forme.

$\frac{dz_0}{dx}$ est nul pour $x = L$.

$$\frac{dz_0}{dx} = -\frac{2\,C}{3\,ak\sqrt{ax+b}}\left[(aL+b)^{\frac{3}{2}} - (ax+b)^{\frac{3}{2}}\right].$$

$ax + b$ doit être > 0, c'est-à-dire $b > 0$, $aL + b > 0$,

Si a est positif, pas de difficultés : $\frac{dz_0}{dx}$ est > 0.

Si a est négatif,

$$b + ax > b + aL,$$

pour $0 \leqslant x \leqslant L$: $\frac{dz_0}{dx}$ est encore > 0.

Le fond de la nappe présente-t-il des points d'inflexion ?

$$\frac{d^2z_0}{dx^2} = \frac{2C}{3ak} \cdot a + \frac{2CC_2}{3ak} \frac{a}{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{C}{3k}\left[2 + \frac{(aL+b)^{\frac{3}{2}}}{(ax+b)^{\frac{3}{2}}}\right] < 0.$$

La solution trouvée (formules (34[ter])) correspond encore au cas d'une nappe convexe vers le haut, comme pour le cas où le fond était parabolique.

Au surplus, si $aL + b = 0$, $C_2 = 0$, $a < 0$, et le fond est une parabole convexe. Le cas étudié [1] n'est donc qu'un cas très voi-

[1] Ici encore, au lieu de supposer que le débit est très petit pour $x = L$, on peut le supposer nul pour une valeur de x_1 variable avec t. Nous aurons alors encore une solution rigoureuse. On aura

$$\frac{2C}{3ak}(ax_1+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2CC_2}{3ak} + \frac{ae^{Ct_1+C_3}}{2} = 0 \text{ au temps } t_1.$$

On a $\zeta > 0$, et x_1 ne doit pas croître au-delà de toute limite. Admettons que l'on ait $C < 0$.

D'abord pour $x < x_1$, le débit est positif, car $\frac{(b+ax)^{\frac{3}{2}}}{a}$ décroît quand x décroît; en même temps $\frac{\partial(z_0+\zeta)}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_{x=x_1}} = 0$. A l'amont de x_1, le débit est négatif, et $\frac{\partial z}{\partial x} < 0$. La surface libre présente au point x_1 un maximum, et l'onde corrélative s'aplatit partout de façon à donner un débit vers l'amont et vers l'aval du point x_1, car

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sqrt{ax+b}\,\psi'_1(t) = \sqrt{ax+b}\,Ce^{Ct+C_3} < 0.$$

Nous n'insistons pas ; mais il nous a paru intéressant de signaler cette solution rigoureuse qui diffère essentiellement de celles que nous avons indiquées

sin, au moins dans un cas particulier, d'un cas antérieur ou d'un cas similaire. Le graphique (7) corrélatif est sensiblement formé de droites passant par l'origine.

En résumé nous étudions ici sur des exemples trois types de nappes :

1° Nappes à origine amont fixe (type auquel s'est borné M. Boussinesq) ;

2° Nappes à origine amont variable, l'épaisseur étant nulle à cette origine ;

3° Nappes à sommet variable et présentant deux versants.

précédemment. A l'amont de $x = x_1$, il y aura un débit vers l'autre versant de la nappe (partie où $\frac{\partial z}{\partial x} < 0$, et qui aura aussi généralement pour aboutissants une ou des sources). Des inégalités dans la répartition des pluies sur les deux versants d'un côteau paraissent rendre possible une solution de cette nature. Ceci montre que : *l'origine de la partie de la nappe qui alimente une source peut varier avec le temps de façon que la limite du bassin versant de cette source ne soit pas marquée par la ligne de crête du côteau. On savait déjà* (Annales de l'Observatoire de Montsouris, 1901, p. 259, source de la Dhuis) *que, grâce aux bétoires par exemple, il pouvait en être ainsi : mais d'autres causes, une inégale répartition des pluies sur les deux versants d'un côteau, etc., peuvent produire le même effet.*

CHAPITRE V

—

ESSAI D'UNE THÉORIE MATHÉMATIQUE DU MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES NAPPES (*suite*). SOLUTIONS APPROXIMATIVES. CRUES DES NAPPES SOUTERRAINES ET DES SOURCES — STABILITÉ DU MOUVEMENT. MOUVEMENTS PERMANENTS.

Indépendamment des solutions exactes, on peut obtenir des solutions approximatives valables pendant un temps plus ou moins limité, ou sur une longueur plus ou moins grande moyennant certaines hypothèses, de façon à révéler ou expliquer plus ou moins un certain nombre de phénomènes.

Utilisation de résultats dus à M. Boussinesq. — Cherchons d'abord à utiliser des résultats obtenus anciennement par M. Boussinesq dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes*.

En supposant $z_0 = ax$ dans (21), il vient

$$(35)\ k \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - ax)\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial z}{\partial t}\ [1].$$

[1] Pour passer de (35) à l'équation (ε) de la p. 255 de l'essai précipité, on doit poser $a = \sin i$, $\cos i = 1$; $h = z - ax$, $s = -x \cos i$.

L'équation (35) admet comme solutions rigoureuses presque évidentes :

1° $z = ax + h$ (h c^te^), $u = ka$, régime uniforme ;

2° $z = \alpha x + k(\alpha - a)\alpha t + \gamma$, ($\alpha, \gamma$ c^tes^), régime de crue ou décrue (voir p. 66) ;

3° Les mouvements permanents où $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, (36) $(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x} = \mu$, qui sont aussi des solutions de (21). En supposant z_0 quelconque dans (36), nous indiquerons plus loin (p. 107) le moyen d'aborder l'intégration dans certains cas.

1° $\frac{\partial(z - ax)}{dx}$ est bien plus petit que a. Soit $\zeta = z - z_0$ (¹) ;

Nous supposons de plus $\frac{\partial^2\zeta^2}{\partial x^2}$ très petit par rapport à $a\frac{\partial\zeta}{\partial x}$. Dans ce cas

$$u = k\left(a + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = ka\,(1 + \varepsilon)$$

(35) se réduit à

$$ka\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \tag{36}$$

L'intégrale générale est

$$(36^{bis})\ \zeta = \Phi(x + kat)$$

où Φ est une fonction arbitraire : la hauteur ζ se propage de l'amont vers l'aval avec la vitesse ka. Pour donner un exemple

(¹) Pour montrer un exemple de cas où $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ peut être petit par rapport à $\frac{\partial z_0}{\partial x}$, au moins pendant un temps limité, il nous suffira de prendre le cas d'une nappe à peu près desséchée à laquelle parviennent les eaux d'une pluie répartie uniformément à la surface de la nappe : dans ce cas d'ailleurs, même si z_0 est quelconque, $\zeta = z - z_0$ est peu différent pendant un certain temps dans toute l'étendue de la nappe ou la plus grande partie de cette nappe, en sorte que $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ est petit par rapport à $\frac{dz_0}{dx}$.

Au surplus il y aura d'autres cas où il est vraisemblable de supposer que $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ est toujours petit, sauf au voisinage de quelques points, par rapport à $\frac{dz_0}{dx}$: dans la majeure partie du bassin de la Seine les chutes de pluie ne dépassent pas 0m,60 à 0m,80 par an ; bien des nappes superficielles ne peuvent dépasser quelques mètres d'épaisseur. Si le sommet du fond de la nappe est à hauteur suffisante, il y a forcément une certaine partie de la nappe où $\frac{dz_0}{dx}$ est grand par rapport à $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$.

D'ailleurs nous savons que, pour une nappe à fond parabolique convexe vers le haut, il en est probablement presque toujours ainsi, sauf à certains moments ou en certains points exceptionnels, puisque $\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0$ est une solution rigoureuse (p. 48, plus haut).

d'un cas où ceci peut avoir lieu, au moins théoriquement, nous prendrons

$$(37) \qquad z = \alpha x + \beta t + \gamma, \qquad \zeta = (\alpha - a)\, x + \beta t + \gamma.$$

$$(38) \qquad \zeta = (\alpha - a)\,(x + k\alpha t) + \gamma,$$

car (35) donne

$$k\alpha\,(\alpha - a) = \beta.$$

La hauteur ζ se propage de l'amont vers l'aval avec la vitesse $k\alpha$; (37) et (38) constituent alors une solution exacte.

Soit $(\alpha - a)$ très petit par rapport à a : ζ est bien à peu près de la forme $\Phi\,(x + kat)$ au moins pour un temps assez long.

$$\frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \zeta\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = (\alpha - a)^2$$

est très petit par rapport à $a\,(\alpha - a)$. Quand $\alpha - a$ est négatif, et $\gamma > 0$, ζ s'annule pour une valeur de $x + k\alpha t$ c[te] : la longueur mouillée de la nappe va constamment en décroissant ; à partir de ce point son épaisseur va constamment en augmentant quand x diminue, et proportionnellement à la diminution de x. Le débit Q est

$$(39) \qquad Q = A\zeta\,\frac{\partial z}{\partial x} = A\left[\gamma + (\alpha - a)\,(x + k\alpha t)\right]\alpha,$$

et décroit, pour $x = 0$, comme une fonction linéaire du temps, c'est-à-dire de quantités égales dans des temps égaux.

Dans un régime de cette espèce, s'il est réalisé à peu près dans la nature [1], une petite pluie uniforme sur la partie de la nappe où il y a débit ne troublera pas le régime sensiblement. Mais il pourrait en être différemment pour une pluie uniforme à l'amont à moins qu'elle ne soit assez faible par rapport au volume déjà emmagasiné dans la nappe.

Les sources les plus hautes devront évidemment tarir les premières : mais toutes les sources peuvent tarir au bout d'un temps limité. Le tarissement sera d'autant plus rapide que a est plus grand.

[1] *A priori*, il ne semble pas impossible qu'il en soit ainsi.

Il est encore intéressant dans le cas général (36bis) d'examiner le cas où les eaux d'une petite pluie $\chi(x)$ non uniforme parviennent à la nappe [1] dans la partie où le débit est $\neq$ o au temps t_0. Supposons par exemple $\chi(x)$ plus fort à l'amont pour $x = x_1$ qu'à l'aval pour $x = x_2$ [2]. La hauteur ζ est au temps t_0 (équation (36bis)) :

$$\zeta_0 = \Phi(x + kat_0) + \chi(x). \text{ [3]}$$

et, au temps t postérieur,

$$\zeta(x) = \Phi(x + kat) + \chi[x + ka(t - t_0)]. \tag{40}$$

La hauteur $\zeta(x_1)$ va se transmettre vers l'aval avec la vitesse ka, et sera réalisée en x_2 au bout du temps τ, avec

$$x_1 + kat = x_2 + ka(t + \tau), \qquad \tau = \frac{x_1 - x_2}{ka}.$$

Soit $t = t_0$: la hauteur moyenne pendant l'intervalle de temps τ en x_2 est la moyenne des valeurs de ζ au temps t_0 pour les points compris entre x_1 et x_2. Le débit moyen est proportionnel à la moyenne des quantités $ka\zeta$, approximativement, c.-à-d. à

$$ka \times \left[\text{moy. } \Phi(x + kat_0) + \text{moy. } \chi(x)\right].$$

Donc, à une 1re approximation, *dans l'intervalle de temps* τ, *la*

[1] $\chi(x)$ est, non la hauteur de pluie, mais la proportion de cette hauteur qui parvient à la nappe : on peut supposer χ proportionnel à la hauteur de pluie.

[2] Si l'altitude du sol qui reçoit la pluie va en moyenne en augmentant sérieusement avec x, on sait depuis longtemps (voir par exemple Angot, *Traité de Météorologie*, Paris 1899, p. 225 ; Durand-Claye, *Hydraulique agricole*, t. I, 1890, p. 135, Dausse, *Annales des Ponts et Chaussées*, 1842 1er sem., p. 186) que χ croit un peu avec l'altitude. D'après la loi de Fournié (*Manuel hydrologique du bassin de la Seine*, Paris, 1884, p. 11) χ serait, dans une région assez limitée, fonction de x seul. Pour tenir compte de ces variations, il faudrait avoir idée de la nature de la fonction χ : s'il s'agit d'un bassin limité on pourra supposer par exemple $\chi = \alpha + \beta x$, ou $\chi = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Nous laisserons pour le moment ce point de côté ; une étude théorique préalable de la loi de Fournié pourrait être utile : nous espérons y revenir.

[3] Quant $\chi(x)$ est constant, l'arrivée de χ à la nappe ne change pas la valeur de $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ et la solution approximative est donnée par le même procédé. Si $\chi(x)$ est variable on doit supposer que $\frac{d\chi}{dx}$ et $\frac{d^2\chi}{dx^2}$ sont suffisamment petits.

hauteur moyenne et le débit moyen en x_2 sont les mêmes que si, dans l'intervalle de x_1 à x_2, l'afflux $\chi(x)$ avait été uniformément réparti.

2° $\zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \zeta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ est relativement négligeable.

(35) devient

$$k\left(\frac{\partial z^2}{\partial x^2} - a\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial z}{\partial t}. \tag{41}$$

M. Boussinesq indique (équation (η'), p. 257 de son *Essai*) la solution générale, d'ailleurs compliquée, de cette équation, solution dont nous ne nous servirons pas. Si l'on suppose que $\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$ puisse être regardé comme à peu près nul, ou que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha(1 + \varepsilon)$$

(α fonction de t, ε très-petit ainsi que ses 1ères dérivées), on aura, en ne considérant qu'une partie de la nappe, ou un intervalle de temps limité, d'après (41)

$$\frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha(1 + \varepsilon)\left[\alpha(1 + \varepsilon) - a\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k\alpha(\alpha - a)(1 + \varepsilon'),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(1 + \varepsilon'') = \varepsilon''',$$

$$\alpha = \alpha_1(1 + \varepsilon_1),$$

α_1 étant une c^{te}, ε', ε'', ε''', ε_1 très-petits. Finalement

$$(42)\quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \alpha_1(1 + \varepsilon_2), \\ \frac{\partial z}{\partial t} = k\alpha_1(\alpha_1 - a)(1 + \varepsilon'_2), \\ z = \left\{\alpha_1\left[x + k(\alpha_1 - a)t\right] + \gamma\right\}(1 + \varepsilon''_2), \\ \zeta = \left\{(\alpha_1 - a)\left[x + k\alpha_1 t\right] + \gamma\right\}(1 + \varepsilon'''_2). \end{cases}$$

On retrouve la solution exacte (37), (38), quand $\varepsilon''_2 = \varepsilon'''_2 = 0$.

Ici nous ne supposons plus forcément $|\alpha_1 - a|$ petit. Si $\alpha_1 \neq a$ c'est un régime de crue ou de décrue suivant que $\alpha_1 > a$ ou $\alpha_1 < a$. Ce régime se réduit au régime (37), (38) pour $|\alpha_1 - a|$ petit, et ses lois sont en général les mêmes quand $\alpha_1 < a$. La hauteur ζ se propage vers l'aval avec la vitesse $k\alpha_1$.

Supposons encore qu'une petite pluie $\chi(x)$ parvienne à la nappe dans la partie où le débit n'est pas nul : le régime subsistera sensiblement. Le débit Q était auparavant

$$Q = A(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x} = A\left\{(\alpha_1 - a)(x + k\alpha_1 t) + \gamma\right\}\alpha_1(1 + \varepsilon_3).$$

Si $\chi(x)$ est constant, γ seul varie et est augmenté de χ. Mais si $\chi(x)$ est légèrement variable, $\zeta\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ restant négligeable, de façon que α_1 soit un peu augmenté ou diminué, la vitesse de propagation varie dans le même sens : le débit moyen pendant un temps donné sera en même temps augmenté ou diminué. Toutefois, si la variation de α_1 est très faible par rapport à α_1, cette augmentation du débit moyen sera négligeable à une première approximation.

Résultats nouveaux. — Cas d'une nappe à fond courbe. — Nous allons étudier ce qui se passe dans une nappe à fond courbe, quand on suppose que, dans (21) p. 35, la fonction $\zeta = z - z_0$ satisfait à certaines conditions analogues à celles que M. Boussinesq a indiquées dans le cas d'un fond rectiligne, et dont nous venons de nous servir.

Nous supposerons d'abord que, pour une certaine partie de la nappe, et, pendant un certain temps [1] $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$ soit petit par rapport à $\dfrac{dz_0}{dx}$, et aussi $\zeta\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ petit par rapport à $\zeta\dfrac{d^2z_0}{dx^2}$ ou $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\dfrac{dz_0}{dx}$;

[1] Il est possible de justifier analytiquement cette hypothèse : soient les 2 équations aux dérivées partielles

$$\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta\frac{\partial(\zeta + z_0)}{\partial x}\right], \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{dz_0}{dx}\right).$$

Elles possèdent, pour la même valeur initiale $\zeta_0(x)$ de ζ lorsque $t = 0$, des

en sorte que (21), qui s'écrit

$$\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{dz_0}{dx}+\zeta\frac{d^2z_0}{dx^2}+\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2},$$

devient, à peu près,

$$\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{dz_0}{dx}\right).$$

D'après la p. 57, soit

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}&\zeta\frac{dz_0}{dx}=v\\ &\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{dz_0}{dx}},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{dz_0}{dx}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{f'(x)}\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}\right.$$

si

$$(26)\qquad k\frac{dz_0}{dx}f'(x)=1\,;$$

$$(27^{bis})\quad \left\{\begin{aligned}&v=\Psi'\left(t+f(x)\right),\ (^1)\\ &\zeta=kf'(x)\,\Psi'\left(t+f(x)\right).\end{aligned}\right.$$

solutions qui restent très voisines pendant un temps fini τ, quand $\frac{d\zeta_0}{dx}$ est assez petit ainsi que $\zeta_0\,\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$. L'intégration d'une des équations avec la valeur initiale ζ_0 nous donnera approximativement la valeur de ζ pour l'autre pendant le temps fini τ assez petit. *C'est là ce qui rend vrais approximativement les résultats qui suivent.*

Mais on pourrait sans doute les étendre à un temps très grand, si l'on montrait que, au besoin sous certaines conditions à remplir par ζ_0 ou même z_0 (ζ_0 petit, par exemple, les 2 équations ayant la solution commune $\zeta=0$), *une intégrale particulière de l'une donne, même si t est très grand, une valeur approchée d'une intégrale de l'autre*. En d'autres termes, soit ζ_1, ζ_2 l'intégrale de chaque équation avec la valeur initiale ζ_0 ; si ζ_0 est petit ou non, $|\zeta_1-\zeta_2|$ est-il petit, quel que soit t par rapport à ζ_1 ? Dans quels cas ceci a-t-il lieu ?

Ce problème peut évidemment être généralisé et étendu à une foule d'autres paires d'équations aux dérivées partielles, ou à des paires de systèmes de pareilles équations. La solution paraît présenter quelque intérêt, et nous le posons dans l'*Intermédiaire des mathématiciens.*

Un cas particulier de ce problème est celui de la recherche des solutions communes aux 2 équations aux dérivées partielles précitées (voir plus haut, p. 57).

(1) La fonction Ψ' est-elle, dans (27 bis), absolument arbitraire eu égard à

Le débit Q est ici $A\zeta\left(\frac{dz_0}{dx} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = Av$ sensiblement (Ac^{te}). Ces formules s'appliquent quand t et x varient dans de certaines limites : c'est ce que nous appellerons *le domaine d'application de* (27bis) *ou simplement le domaine de* (27bis). Nous nous y placerons toujours.

On obtiendra la vitesse de propagation du débit v en posant

$$t + f(x) = c^{te}.$$

Considérons 2 points x_1 et x_2 où Q a la même valeur aux temps t_1 et t_2 respectivement, tels que $t_2 - t_1 = 1$.

$$t_1 + f(x_1) = t_2 + f(x_2); \qquad f(x_1) - f(x_2) = 1.$$

l'hypothèse $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ petit par rapport à $\frac{dz_0}{dx}$? Soit, par exemple, dans l'intervalle de x_0 à x_1

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\frac{dz_0}{dx}\right|, \qquad (n \text{ assez grand}),$$

$\frac{dz_0}{dx}$ y restant constamment de même signe. On a, si $\zeta = \zeta_0$, $z_0 = Z_0$ pour $x = x_0$,

$$\zeta = \zeta_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial\zeta}{\partial x}\, dx = \zeta_0 + R, \qquad z_0 = Z_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dz_0}{dx}\, dx = Z_0 + S,$$

$$R \leqslant \frac{S}{n}, \qquad (x > x_0).$$

La variation R de ζ est petite par rapport à celle de z_0 ; si

$$\frac{Z_0 + S}{Z_0} = m + 1, \qquad S = mZ_0$$

et m notable,

$$\frac{\zeta_0 + R}{Z_0 + S} = \frac{\frac{\zeta_0}{S} + \frac{R}{S}}{\frac{Z_0}{S} + 1} \leqslant \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{m} + 1},$$

quand $\zeta_0 \leqslant Z_0$, et $\frac{\zeta_0 + R}{Z_0 + S}$ sera assez petit ; ζ sera assez petit par rapport à z_0. La fonction Ψ devra alors être choisie en conséquence.

II. — Supposons que le volume V qu'occupe la nappe dans le terrain soit très limité, la nappe se vidant sans apports extérieurs. La longueur sur laquelle

Or

$$(43)\qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{\alpha}^{x} \dfrac{dx}{\left|\dfrac{dz_0}{dx}\right|}, \\ f(x_1) - f(x_2) = 1 = \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \dfrac{dx}{\left|\dfrac{dz_0}{dx}\right|}. \end{cases}$$

Nous supposerons ici $\frac{dz_0}{dx}$ constamment positif, et même, pour simplifier, $\neq 0$. — Alors, $x_1 > x_2$:

La propagation du débit Q se fait de l'amont vers l'aval.

$\zeta \geqslant m_1$, d'après $\int_0^L \zeta dx = V$, est $\leqslant \frac{V}{m_1}$. Si V est petit, et L grand, cette longueur sera très modérée.

Supposons par exemple que $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ soit constamment de même signe. Dans la partie où $\zeta < m_1$, $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\zeta}{\partial x}\,\partial x$ est compris entre

$$(x_2 - x_1)\frac{\partial\zeta}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad (x_2 - x_1)\frac{\partial\zeta_2}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad = \zeta_2 - \zeta_1 :$$

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\right| < \frac{m_1}{(x_2 - x_1)};$$

et l'on en conclut encore, si l'on peut prendre $(x_2 - x_1)$ assez grand, qu'il y a une partie notable de la nappe où $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|$ petit par rapport à $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ pour des formes variées de z_0.

Ce raisonnement réussit en particulier dans le cas d'une nappe théoriquement indéfinie, pour laquelle V est limité, dans la partie amont de la nappe. Pour une semblable nappe, on peut faire un raisonnement analogue, que nous croyons inutile de développer, quand on suppose seulement que ζ est une fonction monodrome de x pour les valeurs réelles ou imaginaires de x voisines des valeurs positives de x. On aboutit aux mêmes conclusions. Dans ce cas, d'ailleurs, on peut à peu près assimiler la nappe indéfinie à une nappe finie, car le volume à l'amont de $x = L$ est aussi petit qu'on veut dès que L est assez grand.

Ce raisonnement réussit encore pendant un temps limité au moins pour une nappe convexe, où ζ a la valeur initiale $\zeta_0 = c^{te}$, au temps t_0, car

$$\frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \zeta_0\,\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} < 0,$$

et ζ reste $\leqslant \zeta_0$ pendant un certain temps.

Posons

$$x_1 = x_2 + \xi,$$

$$f(x_2 + \xi) - f(x_2) = \frac{1}{k} \int_{x_2}^{x_1 + \xi} \frac{dx}{\left| \frac{dz_0}{dx} \right|} = 1.$$

$$f'(x_2 + \xi) \left(\frac{d\xi}{dx_2} + 1 \right) - f'(x_2) = 0$$

$$\frac{d\xi}{dx_2} + 1 = \frac{f'(x_2)}{f'(x_2 + \xi)} = \frac{\frac{dz_0}{d(x_2 + \xi)}}{\frac{dz_0}{dx_2}}.$$

Si le fond est convexe, $\frac{dz_0}{dx}$ est fonction décroissante de x_2, et le dernier membre est < 1 : $\frac{d\xi}{dx_2}$ est négatif. Si le fond est rectiligne, $\frac{d\xi}{dx_2}$ est nul. Si le fond est concave, $\frac{dz_0}{dx_2}$ est fonction croissante de x_2, et le dernier membre est > 1 : $\frac{d\xi}{dx_2}$ est positif. ξ est donc fonction décroissante de x_2 quand le fond est convexe, une constante quand le fond est rectiligne, une fonction croissante de x_2 quand le fond est concave.

Dans le premier cas la propagation du débit Q est d'autant plus rapide que l'on est plus à l'amont, d'autant plus lente que l'on est plus à l'aval, dans le deuxième, cette propagation se fait avec une vitesse constante, dans le troisième, la propagation est d'autant plus rapide que l'on est plus à l'aval.

En résumé [1] :

Dans le domaine considéré ici, où $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ *et* $\zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ *sont supposés*

[1] Dans la 1re rédaction de notre mémoire nous nous étions contenté d'étudier le cas où $z_0 = \alpha(x + \beta)^s - \gamma$ ($\alpha > 0$, $s > 0$). Mais nous avons ici trouvé préférable de traiter le cas général où z_0 est quelconque, le fond étant seulement concave ou convexe.

En même temps nous nous sommes attaché à définir avec assez de précision les domaines d'application de nos formules et de nos résultats. Certaines observations verbales de M. Boussinesq, faites à propos d'une autre partie de la 1re rédaction de notre mémoire, nous ont, en effet, conduit à penser que cela était utile.

assez petits au moins pendant un temps limité τ suffisamment petit, le débit Q réalisé à un instant quelconque en un point d'abscisse x_1 se propage de l'amont vers l'aval.

Quand le fond est convexe vers le haut, cette propagation est d'autant plus rapide que x_1 est plus à l'amont ; quand le fond est rectiligne, cette propagation se fait avec une vitesse constante ; quand le fond est concave, cette propagation est d'autant plus rapide que l'on est plus à l'aval.

Effet d'une pluie. — Dans un pareil domaine, soit une pluie uniformément répartie, ou à peu près, qui apporte à la nappe une quantité d'eau $\chi(x)\,dx$ sur la largeur dx au temps t_1 : $\chi(x)$ est constant ou peu variable avec x. Si $\chi'(x)$ et $\chi''(x)$ sont suffisamment petits, les ordonnées z de la surface de la nappe se trouvant brusquement augmentées de $\chi(x)$, $\zeta + \chi(x)$ va jouir des mêmes propriétés que ζ pendant un certain temps à partir de t_1, au moins sur une certaine longueur. On pourra dès lors appliquer encore à ce régime modifié les équations (27bis) p. 70 dans un certain domaine comprenant t_1. Toutes les conséquences des équations (27bis) seront, en particulier exactes, si ζ, au moment considéré, est à peu près constant ou même nul, comme il pourrait arriver si la nappe était à peu près desséchée, au moins dans une partie.

Soient ζ_1, v_1 les valeurs de ζ et v au temps t_1 avant l'arrivée de l'eau de pluie à la nappe. D'après (27bis)

$$(44)\qquad \begin{cases} v_1 = \Psi\left[t_1 + f(x)\right], \\ \zeta_1 = kf'(x)\,\Psi\left[t_1 + f(x)\right]. \end{cases}$$

ζ_1 devient brusquement $\zeta'_1 = \zeta_1 + \chi(x)$, et v_1 devient

$$v'_1 = v_1 + \frac{\chi(x)}{kf'(x)}.$$

Pour avoir les nouvelles valeurs de ζ et v, on mettra v'_1 sous la forme $\Omega\,(t_1 + f(x)$, et l'on remplacera $t_1 + f(x)$ par $t + f(x)$.

Nous pourrons toujours écrire

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{\chi(x)}{kf'(x)} = \omega\left[t_1 + f(x)\right], \\ v'_1 - v_1 = \omega\left[t_1 + f(x)\right], \end{cases}$$

et, pour une époque ultérieure t_2,

$$v'_2 - v_2 = \omega\left[t_2 + f(x)\right], \qquad v_2 = \Psi\left[t_2 + f(x)\right].$$

D'après (27bis).

$$\zeta'_2 - \zeta_2 = kf'(x)\,\omega\left[t_2 + f(x)\right]. \tag{46}$$

Cas où χ ne dépend pas de x. — Supposons χ indépendant de x. Soit $y = f(x)$, d'où

$$x = F(y), \qquad f'(x) = f'_x\left[F(y)\right]. \tag{47}$$

$$\frac{\chi}{kf'_x\left[F(y)\right]} = \frac{\chi}{kf'_x\left[F\{f(x) + t_1 - t_1\}\right]} = \omega\left[t_1 + f(x)\right];$$

au temps t_2,

$$\left\{\begin{aligned} v'_2 - v_2 &= \omega\big(t_2 + f(x)\big) = \frac{\chi}{kf'_x\left[F\{f(x) + t_2 - t_1\}\right]}, \\ \zeta'_2 - \zeta_2 &= \frac{\chi f'(x)}{f'_x\left[F\{f(x) + t_2 - t_1\}\right]}. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Si

$$\frac{dz_0}{dx} = \varphi(x), \tag{49}$$

on a encore

$$\left\{\begin{aligned} v'_2 - v_2 &= \chi\,\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t_1\}\right], \\ \zeta'_2 - \zeta_2 &= \chi\,\frac{\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t_1\}\right]}{\varphi(x)}. \end{aligned}\right. \tag{50}$$

On a

$$f'(x) = \frac{1}{k\dfrac{dz_0}{dx}} = \frac{1}{k\varphi(x)}, \qquad f(x) = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi(x)}.$$

$\varphi(x)$ est positif, et $f(x)$ croît avec x : supposons que nous nous plaçions dans l'intervalle

$$x_0,\ x_1,\ t_1 + \varepsilon_2,\ t_1 - \varepsilon_1,$$

où nos raisonnements sont applicables (ε_1, ε_2 positifs et convenables).

$y = f(x)$ croît de $f(x_0)$ à $f(x_1)$, quand $x = F(y)$ croît de x_0 à x_1, et réciproquement. $f(x)$ croissant avec x,

$$f(x) + t_2 - t_1$$

croît avec t_2, $F(y)$ croît avec y,

$$F\left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}$$

croît avec t_2,

$$\varphi\left[F\left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}\right]$$

croît avec t_2 si le fond est concave, décroît si le fond est convexe, est constant si le fond est rectiligne. Il en est donc de même pour $v'_2 - v_2$.

Ce n'est pas tout : pour chaque valeur de t_2, $v'_2 - v_2$ est fonction de x. Or, $f(x)$ croissant avec x,

$$F\left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}$$

croît avec x,

$$\varphi\left[F\left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}\right]$$

croît avec x si le fond est concave, décroît si le fond est convexe, est constant si le fond est rectiligne. Donc :

Dans le régime et le domaine considérés ici [1], *les eaux d'une pluie uniforme parvenant uniformément à la surface de la nappe auront pour effet d'accroître le débit en chaque point d'une quantité qui augmente avec le temps si le fond est concave, qui est*

[1] A l'origine amont d'une nappe concave alimentée seulement par les pluies et où ζ serait peu variable au temps t_1 et non nul, comme il peut arriver après une chute de pluie, si la nappe est auparavant desséchée à l'origine, le débit sera sensible d'après la formule $u = k\,\frac{\partial z}{\partial x}$. Dès lors la nappe se videra au moins en partie à cette origine : il faudra que $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(z_0 + \zeta)}{\partial x}$ y devienne nul, ou ζ. Notre raisonnement ne s'applique pas alors à cette origine.

constante si le fond est rectiligne, qui décroît avec le temps si le fond est convexe.

A chaque instant cet accroissement de débit croît avec x si le fond est concave, est constant si le fond est rectiligne, décroît quand x croît si le fond est convexe.

Passons maintenant à la surélévation $\zeta'_2 - \zeta_2$. Pour chaque valeur de x, elle est proportionnelle à $v'_2 - v_2$, et varie dans le même sens quand t_2 varie. Etudions sa variation en fonction de x. D'après (50)

$$\frac{\partial(\zeta'_2 - \zeta_2)}{\partial x} = \chi \frac{\varphi' . \mathrm{F}' . f'(x) \varphi(x) - \varphi'(x) \varphi}{\varphi(x)^2},$$

en désignant, pour abréger, par φ et F

$$\varphi \left[\mathrm{F} \left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}\right], \qquad \mathrm{F} \left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}.$$

Or, considérons

$$\mathrm{F}' \left\{f(x) + t_2 - t_1\right\} :$$

d'après

$$(47) \qquad y = f(x), \; x = \mathrm{F}(y), \; f'(x) \frac{dx}{dy} = f'(x)\mathrm{F}'(y) = 1,$$

$$\mathrm{F}'(y) = \frac{1}{f'(x)} = k\varphi(x) = k\varphi \left[\mathrm{F} \left\{f(x)\right\}\right],$$

d'après (49);

$$(51) \qquad \mathrm{F}' \left\{f(x) + t_2 - t_1\right\} = k\varphi \left[\mathrm{F} \left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}\right] = k\varphi ;$$

d'après (26) p. 57 et (49),

$$\frac{\partial(\zeta'_2 - \zeta_2)}{\partial x} = \chi \frac{\varphi'\varphi - \varphi'(x)\varphi}{\varphi(x)^2}$$

$$= \chi\varphi \left[\mathrm{F} \left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}\right] . \frac{\varphi'[\mathrm{F} \left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}] - \varphi'(x)}{\varphi(x)^2}.$$

$\varphi(x)$ étant positif, $\frac{\partial(\zeta'_2 - \zeta_2)}{\partial x}$ est du même signe que

$$\varphi' \left[\mathrm{F} \left\{f(x) + t_2 - t_1\right\}\right] - \varphi'(x) ;$$

mais $\varphi'(x) = \frac{d^2z_0}{dx^2}$, et

$$F\{f(x) + t_2 - t_1\}$$

croît avec t_2 et x. Donc :

suivant que $\frac{d^3z_0}{dx^3}$ est $>$ ou $<$ o, $\zeta'_2 - \zeta_2$ est fonction croissante ou décroissante de x, à condition que, dans le domaine considéré, $\frac{d^2z_0}{dx^2}$ varie constamment dans le même sens.

Si $\frac{d^2z}{dx^2}$ ne variait pas toujours dans le même sens, la discussion serait un peu plus compliquée. Mais ce qui précède la rend facile dans chaque cas particulier.

Dans le régime et le domaine considérés ici, les eaux d'une pluie uniforme parvenant uniformément à la surface de la nappe auront pour effet d'accroître le niveau en chaque point d'une quantité proportionnelle à l'accroissement du débit : cet accroissement de niveau augmente avec le temps si le fond est concave, reste constant si le fond est rectiligne, décroît quand le temps croît si le fond est convexe.

A chaque instant, pourvu toutefois que $\frac{d^2z_0}{dx^2}$ varie constamment dans le même sens $\left(\frac{d^3z_0}{dx^3}\right.$ toujours de même signe$\left.\right)$, cet accroissement de niveau est fonction croissante ou décroissante de x, suivant que $\frac{d^2z_0}{dx^2}$ est fonction croissante ou décroissante de x.

On voit que cet accroissement de niveau ne peut être indépendant de x que si $\frac{d^3z_0}{dx^3} =$ o, ou si la courbure est infinie (fond rectiligne). Nous avons vu qu'il en est bien ainsi (au moins avec réserves dans le 2ème cas), car, dans le 1er cas (p. 59), la solution (27bis) est une solution exacte du problème ; dans le second, la même propriété a été trouvée directement (p. 66, 69).

Nous venons de voir ainsi comment les accroissements $v'_2 - v_2$ et $\zeta'_2 - \zeta_2$ du débit et du niveau varient avec t_2 et x ; on peut encore se proposer d'étudier la rapidité de ces variations, ou mieux la rapidité relative de ces variations.

On pourrait se contenter d'étudier le cas où l'équation du fond est de la forme $z_0 = \alpha (x + \beta)^s - \gamma$ $(s > 0)$: c'est ce que nous avions fait dans la 1ère rédaction de notre mémoire. Mais, encore ici, nous préférons aborder le cas général, les résultats se présentant sous une forme assez simple.

On a, d'après (50),

$$v'_2 - v_2 = \chi \varphi \left[\mathrm{F} \left\{ f(x) + t_2 - t_1 \right\} \right],$$

$$\Delta = \frac{\partial (v'_2 - v_2)}{\partial t_2} = \chi \varphi' \mathrm{F}' = k\chi\varphi'\varphi,$$

d'après (51). $v'_2 - v_2$ varie d'autant plus vite avec t_2 que $\frac{\partial (v'_2 - v_2)}{\partial t_2}$ est plus grand en valeur absolue. Mais, ce qui nous intéresse surtout, c'est la valeur relative de cette variation, c'est-à-dire celle de

$$\mathrm{W} = \frac{\partial (v'_2 - v_2)}{\partial t_2} \cdot \frac{1}{v'_2 - v_2} = k\varphi',$$

ou celle de $k\varphi'$. Or

$$\varphi(x) = \frac{dz_0}{dx}, \qquad \varphi'(x) = \frac{d^2 z_0}{dx^2}.$$

Suivant que le fond est concave $\left(\frac{d^2 z_0}{dx^2} > 0\right)$ ou convexe $\left(\frac{d^2 z_0}{dx^2} < 0\right)$, W est positif ou négatif, comme la variation $\Delta\, dt_2$ elle-même ; nous supposons ici que $\frac{d^2 z_0}{dx^2}$ varie constamment dans le même sens dans le domaine considéré : φ' croîtra ou décroîtra constamment avec t_2, suivant que $\frac{d^3 z_0}{dx^3} = \varphi''(x)$ sera $>$ ou $<$ o.

1° $\frac{d^2 z_0}{dx^2} > 0$, fond concave. — Suivant que $\frac{d^2 z_0}{dx_2}$ croît ou décroît

quand x augmente, W, qui est positif, croît ou décroît quand t_2 et x augmentent.

2° $\frac{d^2z_0}{dx^2} < 0$, fond convexe. — Suivant que la valeur absolue de $\frac{d^2z_0}{dx^2}$ croît ou décroît quand x augmente, celle de W, qui est négatif, croît ou décroît quand t_2 et x augmentent.

Dans les 2 cas, si $\frac{d^2z_0}{dx^2}$ est indépendant de x, W est constant.

En résumé :

Tout étant posé comme précédemment, et $\frac{d^2z_0}{dx^2}$ variant toujours dans le même sens dans le domaine considéré, la valeur absolue $|W|\,dt_2$ de la valeur relative $W\,dt_2 = \frac{\partial(v'_2 - v_2)}{\partial t_2} \cdot \frac{dt_2}{v'_2 - v_2}$ de la croissance de l'accroissement de débit $v_2' - v_2$ pendant le temps dt_2 croît (décroît) lorsque t_2 et x augmentent, quand la valeur absolue de $\frac{d^2z_0}{dx_2}$ est fonction croissante (décroissante) de x.

Pour les nappes à fond parabolique $z_0 = a + bx + cx^2$, W est constant.

Si nous cherchons à raisonner de même sur $\zeta'_2 - \zeta_2$, d'après (50),

$$\zeta'_2 - \zeta_2 = \frac{v'_2 - v_2}{\varphi(x)},$$

$$W_1 = \frac{\partial(\zeta'_2 - \zeta_2)}{\partial t_2} \cdot \frac{1}{\zeta'_2 - \zeta_2} = W.$$

Les mêmes conclusions s'appliquent à la valeur absolue $|W_1|\,dt_2$ de la valeur relative

$$W_1 dt_2 = \frac{\partial(\zeta'_2 - \zeta_2)}{\partial t_2} \cdot \frac{dt_2}{\zeta'_2 - \zeta_2}$$

de la croissance de l'augmentation de niveau $\zeta'_2 - \zeta_2$: on a $W_1 = W$. Pour les nappes à fond parabolique $z_0 = a + bx + cx_2$, W_1 est constant.

Les valeurs de W et W_1 se transmettent d'ailleurs, comme le débit, de l'amont vers l'aval.

Supposons, en particulier, que, dans le domaine d'application des raisonnements précédents, $\frac{d^3 z_0}{dx^3}$ tende à devenir très-petit ou nul quand x croît : φ' tend à devenir constant et $= c$ (c positif ou négatif, suivant que le fond est concave ou convexe). W et W_1, à partir d'une certaine valeur de t_2, pour chaque valeur de x, tendront vers kc : à partir de ce moment on aura sensiblement

$$\frac{\partial X}{\partial t_2} \cdot \frac{1}{X} = kc, \qquad X = Ae^{kct_2},$$

où X désigne à volonté $v'_2 - v_2$ ou $\zeta' - \zeta_2$; donc

$$\begin{cases} v'_2 - v_2 = Ae^{kct_2}, \\ \zeta'_2 - \zeta_2 = A_1 e^{kct_2}, \end{cases}$$

A et A_1 pouvant dépendre de x. Dans le domaine considéré, un graphique analogue à (7) p. 15 sera peut-être possible en ce qui concerne $v'_2 - v_2$ et le débit d'une source.

Cas où $\chi(x)$ est variable. — Il sera bon d'indiquer quelle peut être l'influence de la variabilité de $\chi(x)$ avec x. Nous supposerons, ce qui arrive souvent dans la pratique (note (²), p. 67) que $\chi(x)$ est une fonction légèrement croissante de x ($\chi'(x)$ et $\chi''(x)$ suffisamment petits). On a

$$\chi(x) = \chi[F(y)] = \chi[F\{f(x) + t_1 - t_1\}].$$

Dans les formules (50), la constante χ doit être remplacée par $\chi[F\{f(x) + t_2 - t_1\}]$, qui croît légèrement avec t_2 et x.

1° $v'_2 - v_2$. — Quand le fond est concave, la croissance de $v'_2 - v_2$ avec t et x est légèrement accentuée ; quand le fond est convexe, la décroissance de $v'_2 - v_2$ est modérée ; quand le fond est rectilique, $v'_2 - v_2$ devient une fonction légèrement croissante de t et x.

2° $\zeta'_2 - \zeta_2$. — $\zeta'_2 - \zeta_2$ est encore proportionnel à $v'_2 - v_2$ et varie dans le même sens quand t_2 varie : en chaque point, l'accrois-

sement de niveau est proportionnel à l'accroissement de débit; quand le fond est convexe, la décroissance de $\zeta'_2 - \zeta_2$ lorsque t augmente est modérée; quand le fond est concave, la croissance de $\zeta'_2 - \zeta_2$ avec t est accentuée; quand le fond est rectiligne, $\zeta'_2 - \zeta_2$ croît légèrement avec t.

Il faut ici ajouter à $\frac{\partial(\zeta'_2 - \zeta_2)}{\partial x}$ (p. 77) le petit terme positif

$$\frac{\varphi}{\varphi(x)} \chi_x' [\mathrm{F} \{ f(x) + t_2 - t_1 \}].$$

Supposons encore que $\frac{d^2 z_0}{dx^2}$ varie constamment dans le même sens $\left(\frac{d^3 z_0}{dx^3} \text{ toujours de même signe}\right)$. L'accroissement de niveau $\zeta'_2 - \zeta_2$ croît un peu plus vite avec x quand $\frac{d^3 z_0}{dx^3} > 0$, décroît un peu moins rapidement lorsque x croît quand $\frac{d^3 z_0}{dx^3} < 0$. Si $\frac{d^2 z_0}{dx^2} =$ constante, $z_0 = a + bx + cx^2$, $\zeta'_2 - \zeta_2$ croît légèrement avec x.

Tentative d'explication de certains phénomènes naturels pour les sources basée sur ce qui précède. — Considérons une nappe superficielle. D'après ce qui a été dit p. 69 (note (¹)), le régime que nous venons d'étudier étant supposé réalisé à un instant quelconque sur une longueur plus ou moins grande de la nappe, nous savons seulement que les résultats établis par nous seront vrais pendant un temps limité et sur une longueur plus ou moins grande de la nappe. Dans le cas particulier d'une nappe à fond concave, nous savons (note (¹) page 76) que nos raisonnements ne s'appliquent pas toujours à l'origine de cette nappe. Néanmoins, nous connaissons un type de nappe à fond convexe $z_0 = a + bx + cx^2$ $(c < 0)$ où nos raisonnements restent indéfiniment applicables, et des types voisins où ils peuvent l'être pour un temps très long (p. 45 et suiv.).

Si donc nous voulons faire une application pratique de ce qui précède à celles des nappes superficielles naturelles où la pente $\frac{dz_0}{dx}$ est toujours > 0, nous devons faire certaines réserves. Nous pourrons dire pratiquement, croyons-nous (p. 78) :

Dans un grand nombre de cas, il est probable que les nappes superficielles alimentées seulement par les pluies, qui ont leur fond toujours convexe vers le ciel (la pente du fond étant toujours dirigée vers les sources) et présentent dans leur partie la plus haute un plateau, ne peuvent avoir dans le débit de leurs sources des augmentations sérieuses qu'au moment où les eaux de pluies importantes parviennent à la nappe : c'est alors que se produira le maximum du débit correspondant. La décroissance du débit se fait ensuite progressivement.

Ces conclusions sont rigoureuses si le fond a son équation de la forme $z_0 = a + bx + cx^2$, $(c < o)$.

Si une source éprouve à la suite d'une période de pluies sérieuses, qui profitent à la nappe, des augmentations progressives de son débit, très longues et lentes, la nappe qui l'alimente ne peut avoir son fond convexe. Il faut que ce fond présente des concavités sur une longueur importante, probablement vers l'aval, du côté de la source.

Il semble encore (mais cela paraît moins sûr) qu'il y ait réciprocité [1].

[1] Il est intéressant de signaler pour une nappe à fond *concave* parabolique $z_0 = a + bx + cx^2$, avec $c > o$, une solution rigoureuse.

Reprenons (21) p. 35, et cherchons une solution rigoureuse de la forme $z = \alpha + \beta x$. où α, β sont fonctions de t. On a

$$\frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

$$\frac{1}{k}(\alpha' + \beta' x) = \beta\left(\beta - \frac{dz_0}{dx}\right).$$

On voit que $\frac{dz_0}{dx}$ est linéaire, et que le fond doit être parabolique : $z_0 = a + bx + cx^2$.

$$\alpha' + \beta' x = k\beta(\beta - b - 2cx) .$$

$$\alpha' - k\beta(\beta - b) = o, \quad \beta' = -2kc\beta,$$

d'où

$$\frac{\beta'}{\beta} = -2kc, \qquad \log\beta = -2kct + \log A, \qquad \beta = Ae^{-2kct}$$

$$\alpha' = kAe^{-2kct}(Ae^{-2kct} - b),$$

$$\alpha = \frac{Ae^{-2kct}}{4c}[2b - Ae^{-2kct}] + C, \qquad (C^{te}),\ A > o,$$

Il est probable que, dans un grand nombre de cas, les crues rapides du débit d'une source à la suite de pluies sérieuses qui profitent à la nappe, suivies d'une décroissance progressive du débit, ne peuvent se produire que si le fond de la nappe présente dans sa partie aval des convexités sur une longueur importante.

Il est bien entendu que ces considérations ne s'appliquent pas sans plus ample examen aux nappes dont le fond ne présenterait pas une pente constamment dirigée vers la source.

puisque $\frac{\partial z}{\partial x} = \beta > 0$.

$$z = \frac{Ae^{-2kct}}{4c}\left[2(b + 2cx) - Ae^{-2kct}\right] + C,$$

$$Q = M(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x} = M(z - z_0)\,Ae^{-2kct}.$$

Le débit ne pourra être nul à l'origine amont de la nappe que si l'on y a $z = z_0$: cette origine sera forcément variable avec le temps. Nous laisserons de côté le cas où $c < 0$, et nous supposerons $c > 0$, c'est-à-dire le fond concave. Soit $a = 0$, ce qu'on peut toujours admettre.

L'équation $z = z_0$ doit avoir une racine x_1 réelle.

On a $Ae^{-2kct} = \beta$,

$$4cz = \beta\left[2b + 4cx - \beta\right] + 4cC = 4cz_0,$$

$$\beta^2 - 2(b + 2cx)\beta + 4c(z_0 - C) = 0,$$

$$(b + 2cx)^2 - 4c(z_0 - C) = b^2 + 4cC > 0.$$

Si ceci a lieu, $z - z_0$ a 2 racines réelles en β

$$\beta = b + 2cx \pm \sqrt{b^2 + 4cC}.$$

Nous n'insisterons pas : pour faire voir nettement ce qui se passe, il nous suffira de remarquer que le mouvement n'est autre que celui d'une masse d'eau ABC contenue dans un vase à fond parabolique concave rempli d'une matière filtrante poreuse, et limitée par la droite AB ; mais ici le vase est très grand (une assimilation semblable est possible chaque fois qu'à l'origine amont de la nappe l'épaisseur est nulle).

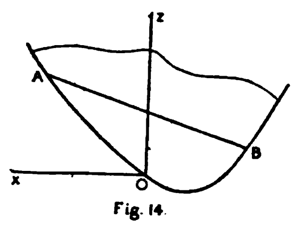


Fig. 14.

Quand t croît, z tend à devenir $= C$, et le niveau à devenir horizontal ($\lim z - z_0 = C > 0$). Le débit Q pour $x = 0$, en posant $Ae^{-2kct} = \beta$, est

$$Q = M\beta\left(\frac{\beta b}{2c} - \frac{\beta^2}{4c} + C\right) = \frac{M}{4c}\left(4cC\beta + 2b\beta^2 - \beta^3\right).$$

Son expression est un polynome entier en β. Elle peut être utile, parce

Enfin, il est intéressant de remarquer que le profil en long du fond de nos nappes à crues lentes et progressives a la même forme que le profil en long du fond des cours d'eau (A. Durand-Claye, Hydraulique agricole, t. I, Paris, 1890, p. 248), c'est-à-dire est concave, tandis que le profil en long du fond de nos nappes à crues brusques a une forme différente.

qu'elle nous indique une forme à essayer dans l'étude des débits des sources. On a

$$\frac{dQ}{d\beta} = \frac{M}{4c}\left(4cC + 4b\beta - 3\beta^2\right).$$

Pour $t = -\infty$, cette dérivée est négative ; pour $t = +\infty$ ($\beta = 0$) positive. Quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$, β décroît de $+\infty$ à o, et $\frac{dQ}{d\beta}$ n'a qu'une racine dans cet intervalle, pour laquelle Q est maximum. Donc *dans ce régime le débit est d'abord croissant, passe par un maximum, puis décroît jusqu'à* o.

Il n'est pas inutile de signaler son analogie avec celui des sources du Havre (p. 176).

Ceci s'étend au cas où z_0 dépend de deux variables x et y ; (21) est remplacé (p. 36) par

$$(22) \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Posons $z = \alpha + \beta x + \gamma y$, ($\alpha$, β, γ fonctions de t).

$$\frac{1}{k}\left(\alpha' + \beta' x + \gamma' y\right) = \beta\left(\beta - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right) + \gamma\left(\gamma - \frac{\partial z_0}{\partial y}\right).$$

Sans discuter en détail cette équation, nous remarquerons qu'elle admet une solution telle que

$$\beta = Ae^{-2kat}, \; \gamma = A_1 e^{-2kat}, \; a > 0$$

si l'on a

$$\frac{1}{k}\alpha' - \beta^2\left(1 + \frac{A_1^2}{A^2}\right) = \beta\left[-\frac{\partial z_0}{\partial x} - \frac{A_1}{A}\frac{\partial z_0}{\partial y} + 2a\left(x + \frac{A_1}{A}y\right)\right] = A_2\beta,$$

d'où

$$\frac{1}{k}\alpha' = \beta^2\left(1 + \frac{A_1^2}{A^2}\right) + A_2\beta, \qquad (A_2 = -A_3 = c^{te})$$

$$A\frac{\partial z_0}{\partial x} + A_1\frac{\partial z_0}{\partial y} = 2a\left(Ax + A_1 y\right) + AA_3$$

La solution générale de cette dernière équation est

$$z_0 = a\left(x^2 + y^2\right) + f\left(A_1 x - Ay\right) + A_3 x\,;$$

Nappes à fond successivement convexe et concave. — Il paraît encore utile d'examiner ce qui va se passer dans le cas d'un fond successivement convexe (dans le haut) et concave (dans

ces surfaces sont susceptibles d'une définition géométrique simple résultant de ce que $z_1 = f\ (A_1x \dot{-} Ay)$ est l'équation d'un cylindre de génératrices parallèles à xoy ; les sections de ces surfaces par les plans $A_1x - Ay = c^{te}$ parallèles à Oz, sont des paraboles d'axe vertical. Quand f est de degré o ou 1, le fond est un paraboloïde de révolution d'axe vertical.

α est un polynome du 2me degré en e^{-2kat}. Le mouvement sera celui d'une masse d'eau limitée par un plan variable à la partie supérieure (surface libre) dans un vase dont le fond est une des surfaces trouvées ci-dessus, vase rempli d'une masse filtrante poreuse. Bien entendu $z - z_0$ doit être nul sur le pourtour de la surface libre, ce qui a lieu pour les paraboloïdes de révolution précités (une assimilation de même nature est possible chaque fois qu'à la limite amont de la nappe l'épaisseur de celle-ci est nulle).

Le débit à travers un plan quelconque parallèle à Oz, débit supposé recueilli pratiquement par un collecteur n'ayant sur les niveaux qu'une influence locale, est

$$Q = M\,(z - z_0)\,\frac{\partial z}{\partial n} = M\,(z - z_0)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)$$

(n élément de normale au plan). *C'est encore un polynome du 3me degré en e^{-2kat} sans terme constant* : le coëfficient de e^{-6kat} est proportionnel à $-\left(A\,\frac{\partial x}{\partial n} + A_1\,\frac{\partial y}{\partial n}\right)$ et négatif au moins dans un cas étendu ; les conclusions au sujet de la variation du débit sont, dans un cas étendu, les mêmes que quand $\frac{\partial z_0}{\partial y} = 0$.

Le régime dans le cas où $\frac{\partial z_0}{\partial y} = 0$ avec fond parabolique peut être assimilé à celui où les équations (27bis) p. 70 ou (50) p. 75 sont applicables, au moins aux environs du point où la tangente au fond et la surface libre sont des droites parallèles, quand c est petit. En effet, si $\zeta = z - z_0$,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{dz_0}{dx} = \beta - (b + 2cx),$$

$$\zeta\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\,(z - z_0)\,2c = -\,2c\zeta.$$

Aux environs du point en question, où $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$, sur une longueur notable, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ et $\zeta\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ seront petits, si ζ n'est pas trop grand, et si c est suffisamment petit ; c'est le cas d'une parabole très aplatie.

Enfin, dans ce dernier cas, en supposant que l'origine amont ne varie que très lentement avec le temps, de façon à n'osciller qu'entre des limites restreintes dans le cours d'une année, on peut essayer d'aborder l'étude de l'influence des pluies sur le débit, les pluies H augmentant z d'une quantité proportionnelle à H ; nous n'insistons pas ici. Mais ceci doit, pensons-nous, avoir lieu souvent en pratique dans les nappes à épaisseur nulle à l'origine amont.

le bas), quand $\frac{dz_0}{dx}$ est encore $\geqslant$ o, et, en général, $>$ o. Les raisonnements précédents sont en partie applicables avec des hypothèses et des réserves analogues. On peut même alors les appliquer séparément à la partie convexe et à la partie concave. Les formules (50) p. 75 donnent une solution approchée dans un domaine limité. Au sommet de la partie convexe, où nous supposons la tangente de fond horizontale, le débit, proportionnel à $\zeta \frac{dz_0}{dx}$, est nul : ce point est l'origine amont de la nappe.

Le régime correspondant à (50) étant encore supposé réalisé, les eaux d'une pluie uniforme parvenant uniformément à la surface de la nappe au temps t_1 auront pour effet d'accroître le débit en chaque point au temps t_1 proportionnellement à

$$(\zeta'_2 - \zeta_2) \frac{dz_0}{dx} = \chi(x) \frac{dz_0}{dx}.$$

Cet accroissement est maximum au temps t_1 au point $x = L_1$ où $\frac{dz_0}{dx}$ est maximum, c'est-à-dire au point d'inflexion du fond où la courbure change de sens. L'accroissement de débit (p. 76) décroît à l'amont, croît à l'aval, en général, quand t croît. De même pour l'accroissement du niveau, qui est proportionnel à cet accroissement de débit. Si, par exemple, au temps t_1, ζ était constant, ou à peu près, la partie amont se vide, d'une part au profit de la partie aval, où le volume emmagasiné augmente, d'autre part pour alimenter les sources. Toutefois aux environs du point d'inflexion I, à l'aval de ce point, un phénomène spécial se produit : nous savons que le débit Q se propage de l'amont vers l'aval. Au temps t_1 le débit était maximum dans l'étendue de la nappe (plus exactement dans le domaine considéré qu'on suppose contenir I et ses environs) en I ; le débit deviendra ensuite maximum en un point à l'aval, et ce maximum se propagera vers l'aval. Donc :

Dans le régime et le domaine étudiés ici, pour une nappe concave à l'aval, convexe à l'amont, en un point situé à l'aval du point d'inflexion I *du fond, le débit va d'abord en croissant avec le temps d'autant plus longtemps que ce point est plus éloigné de* I, *passe par un maximum dont la valeur est égale à celle du ma-*

ximum réalisé antérieurement en I, *puis décroît. (Le domaine est supposé contenir* I *et ses environs).*

Considérons toujours un domaine (par rapport à t et x) où les formules (27bis) p. 70 et (50) restent applicables. Supposons qu'à des temps t_1, t'_1, t''_1, ... parviennent à la surface de la nappe des quantités d'eau χ_1, χ'_1, χ''_1, ... uniformément réparties, tous ces temps étant compris dans un intervalle de temps T_1. Au temps t_2 postérieur à la dernière chute de pluie, les formules (50) donneront

$$(52)\quad \begin{cases} v'_2 - v_2 = \chi_1\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t_1\}\right] \\ \qquad + \chi'_1\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t'_1\}\right] + \dots \\ \qquad = \sum_i \chi_1^{(i)}\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t_1^{(i)}\}\right] \\ \varphi(x)(\zeta'_2 - \zeta_2) = \sum_i \chi_1^{(i)}\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t_1^{(i)}\}\right] = v'_2 - v_2. \end{cases}$$

On [1] pourrait aussi supposer que ces quantités parviennent à la nappe d'une manière continue pendant des intervalles de temps

[1] On remarquera que les formules (52) sont applicables quelle que soit la forme du fond, qui pourrait présenter 0 ou plusieurs points d'inflexion, pourvu que $\frac{dz_0}{dx} > 0$. Ce sont toujours les points d'inflexion, qui déterminent le maximum d'influence sur le débit des pluies élémentaires χ_1, χ'_1, ... Une remarque analogue peut se faire pour un certain nombre des résultats qui précèdent ou qui suivent. En particulier :

Dans les régimes et les domaines que nous étudions, où les formules (27bis) *et* (52) *s'appliquent, la pente du fond étant toujours dirigée vers la source, ce seront surtout les parties les plus inclinées du fond de la nappe qui auront la plus forte influence sur les accroissements de débits dus aux pluies. L'influence d'un point de la nappe sur ces accroissements de débit est d'autant plus grande que la pente du fond est plus grande.*

On peut vérifier que, sous des conditions convenables, (52) est une solution approchée, d'après la note (1) p. 69, dans un certain domaine. En effet, la valeur ζ_2 de ζ'_2 serait assez exacte, s'il ne pleuvait pas pendant le temps τ à partir du temps initial t_0 : on prend t_1 et $t_2 < t_0 + \tau$. Si $t_1 - t_0$ est assez petit, et χ_1 aussi, la valeur

$$\zeta_2 + \chi_1\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t_1\}\right]$$

est encore assez exacte (il suffit pour le voir de prendre cette valeur au temps t_1 pour nouvelle valeur initiale au temps t_1. Les valeurs de $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ et $\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ au temps

t_1 à $t_1 + \tau_1$, t'_1 à $t'_1 + \tau'_1$, ... la quantité qui parvient à la nappe d'une manière continue dans le 1[er] intervalle par exemple étant $\varpi_1 dt$ (ϖ_1 fonction ou non de t) pendant le temps dt. Les formules précédentes seraient remplacées par

$$(52^{bis})\begin{cases} v'_2 - v_2 = \sum_i \int_{t_1^{(i)}}^{t_1^{(i)}+\tau_1^{(i)}} \varpi_1^{(i)}\varphi\left[F\{f(x)+t_2-t_1\}\right]dt, \\ (\zeta'_2-\zeta_2)\varphi(x) = v'_2 - v_2. \end{cases}$$

Mais il nous suffira de raisonner sur les formules (52).

La valeur de $v'_2 - v_2$ au temps t_2 sera ce que nous appellerons *le contingent C_1 de la période T_1 au temps t_2.*

Rien ne nous empêche de considérer une suite de périodes de temps T_1, T_2, T_3, ... et de contingents corrélatifs C_1, C_2, C_3, ... Considérons finalement la somme

$$N = C_1 + C_2 + \dots$$

Un des éléments de cette somme pour une valeur de x aura d'autant plus d'influence sur la valeur de N,

$$E'_1 = \chi'_1\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t'_1\}\right]$$

par exemple, 1° que χ'_1 est plus fort : cette influence est proportionnelle à χ'_1 ; 2° que $\varphi[F\{f(x) + t_2 - t'_1\}]$ est plus voisin de $\varphi(L_1)$, L_1 étant l'abscisse du point d'inflexion I, ce qui n'est possible, puisque $t_2 > t'_1$, que si $x < L_1$; 3° ou encore, quand $x > L_1$, que t_2 est plus voisin de t'_1. L'élément E'_1, dans la partie qui est à l'aval de I ($x < L_1$), croît avec le temps, passe par un maximum, puis décroît. Dans la période où E'_1 décroît, si χ'_1 est grand (relativement), l'influence de E'_1 pourra rester très-sensible ; si χ'_1 est petit

t_1 sont encore très petites. Si χ_1 n'est pas trop grand, ou plus généralement si le total des pluies considérées n'est pas trop fort, les valeurs initiales au temps $t_1 + \varepsilon$, ultérieurement $t'_1 + \varepsilon$, ... laisseront encore $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ et $\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ petits, etc.) jusqu'au temps $t_0 + \tau_1 > t_1$, avec $\tau_1 \leq \tau$. Si χ_2 est assez petit, et $t_0 + \tau_1 > t'_1 > t_1$, la valeur

$$\zeta'_2 + \sum_2 \chi_1^{(i)}\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t_1^{(i)}\}\right]$$

est assez exacte jusqu'au temps $t_0 + \tau_2$, $\tau_2 \leq \tau_1$; et ainsi de suite.

cette influence pourra au contraire être faible, même aux environs du maximum de E'_1. On peut encore dire, en restant toutefois dans le domaine d'application de (27bis) et de (52), que l'influence de χ'_1 *a tendance* à rester forte ou sensible d'autant plus longtemps que χ'_1 est plus fort. Nous ne pouvons préciser davantage, puisque nous ne savons pas dans quelles limites varie E'_1 dans le domaine considéré.

Quelque chose d'analogue, mais de moins net en général, a lieu pour les contingents C_1, C_2, C_3, ... Supposons $T_1 = T_2 = T_3 = ...$ On voit de suite que l'influence d'une des périodes sur N est d'autant plus grande que les quantités corrélatives sont plus grandes ou plus nombreuses.

L'influence d'une période pluvieuse dans la saison froide sur le débit est d'autant plus grande que cette période est plus pluvieuse ou plus généralement qu'une plus grande quantité de pluie y profite à la nappe.

Si l'une des périodes est très pluvieuse par rapport aux précédentes et aux suivantes, l'accroissement du débit ou le contingent C_j corrélatif sera, à l'aval de I, très fort par rapport aux autres contingents. Les variations du contingent C_j pourront même masquer le sens des variations des autres contingents.

Une période exceptionnellement pluvieuse donnera un accroissement de débit exceptionnel. Si les périodes précédentes et suivantes n'ont que des pluies ordinaires ou faibles, l'accroissement de débit en un point pourra être croissant ou décroissant à peu près en même temps que le contingent de la période exceptionnellement pluvieuse.

Des lois analogues en général subsistent évidemment pour la partie convexe de la nappe, mais là les contingents sont toujours décroissants. Nous reviendrons plus en détail tout-à-l'heure sur les crues des nappes à fond convexe.

Rapprochement avec le régime des sources du Havre. — Ce qui précède ne suffit pas évidemment en général, au moins jusqu'à détermination plus complète du domaine d'application de (52), pour tirer des conclusions sûres en ce qui concerne le régime

naturel des nappes à fond successivement convexe et concave, *dans une période de plusieurs années*, et ne peut donner à cet égard que des probabilités ([1]). Mais il nous paraît néanmoins utile de le rapprocher des résultats que donne l'expérience en ce qui concerne le régime de certaines sources, pour lesquelles d'ailleurs, la forme du fond de la nappe n'est pas, croyons-nous, connu, à savoir des sources qui servent à l'alimentation de la ville du Havre (voir plus loin, p. 176). Ces résultats ([2]) peuvent être formulés ainsi : appelons *contingent d'une saison froide* l'influence à chaque instant des pluies de cette saison sur le débit (l'influence des pluies de la saison chaude étant en général négligeable).

Le débit au temps t *est la somme des contingents au temps* t *des diverses saisons froides précédentes et de la saison froide en cours. Parmi ces contingents, ceux des saisons les plus rapprochées sont seuls croissants ; les autres décroissent.*

Chaque contingent sera d'autant plus fort que la saison froide correspondante est plus pluvieuse. Si plusieurs saisons froides à peu près également pluvieuses se succèdent, le débit deviendra une fonction à peu près périodique.

A la suite d'une saison froide très pluvieuse, une crue exceptionnelle se produira, et le contingent correspondant à cette saison pourra être sensible plus tôt et plus longtemps que d'habitude. Si cette saison froide est suivie d'une saison froide ordinaire ou sèche, le maximum qui doit correspondre à cette dernière pourra ne pas se produire ou être insensible, et la décroissance de la crue continuer à se manifester pendant 2 ans, exceptionnellement même pendant plus de temps.

([1]) Dans la première rédaction de notre mémoire, nous avions passé outre, et développé les calculs en prenant exclusivement pour T_1, T_2,... les diverses saisons froides successives. Les formules qu'on obtient ainsi pourront être essayées dans la pratique. Mais, jusqu'à nouvel ordre, les conditions (relatives à z_0 et x, par exemple) où ces formules seraient exactes ne sont pas spécifiées. Si l'on en admet l'exactitude, on obtient identiquement les lois expérimentales ci-après.

([2]) En ce qui concerne la source de Bellefontaine, ils sont dus pour la plupart à M. le colonel Meurdra qui les a établis expérimentalement ou énoncés (*Mém. Assoc. franç.*, Congrès du Havre, 1877, Sources du Havre). En particulier, c'est à lui que nous empruntons l'expression de *contingent* ; il n'étudie que les sources de Bellefontaine. Nous verrons plus loin d'après les tableaux des débits depuis 20 ans, d'une part que ces lois continuent à se vérifier, d'autre part qu'elles s'étendent aux sources de Saint-Laurent de Brèvedent.

Remarque sur le régime des nappes à fond convexe. — Nous allons considérer les nappes dont le fond a pour équation

$$z_0 = a + bx + cx^2, \qquad (b > 0,\ c < 0).$$

Leur étude permet de préciser certaines des considérations précédentes et de les étendre à une période de temps indéfini : on peut en particulier leur appliquer la notion des contingents, et retrouver rigoureusement par l'analyse certains phénomènes connus, manifestés en particulier par la source de Cérilly, dont les crues ont le même caractère que celles des nappes à fond convexe. Ici, la solution obtenue est complète dans le temps et l'espace.

Nous supposons que la nappe ne reçoive que des eaux de pluie uniformément réparties. Nous savons alors (p. 48) que si le régime propre est réalisé à un instant quelconque, ce que nous supposons, il continue ou peut continuer à l'être par la suite. Ici,

$$\varphi(x) = b + 2cx,$$

$$f(x) = \frac{1}{k}\int_0^x \frac{dx}{b + 2cx} = \frac{1}{2kc} \log \frac{b + 2cx}{b},$$

$$b + 2cL = 0$$

(L longueur de la nappe) ;

$$\varphi(x) = 2c(x - L), \qquad f(x) = \frac{1}{2kc} \log\left(1 - \frac{x}{L}\right) = y,$$

$$1 - \frac{x}{L} = e^{2kcy}, \qquad \frac{x}{L} = 1 - e^{2kcy} = \frac{F(y)}{L},$$

$$F\{f(x) + t_2 - t_1\} = L\left[1 - e^{2kc(t_2 - t_1) + \log\left(1 - \frac{x}{L}\right)}\right]$$

$$= L\left[1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right) e^{2kc(t_2 - t_1)}\right]$$

$$\varphi\left[F\{f(x) + t_2 - t_1\}\right] = -2c(L - x)e^{2kc(t_2 - t_1)}.$$

Nous savons (p. 47) que

$$v_2 = Ae^{2kct_2}(b + 2cx),$$

d'où

$$(52^{ter}) \qquad \begin{cases} v'_2 = v_2 - 2c\sum_i \chi_1^{(i)}(\mathrm{L}-x)\, e^{2kc\,(t_2 - t_1^{(i)})}, \\ (\zeta'_2 - \zeta_2)\, 2c(x-\mathrm{L}) = v'_2 - v_2. \end{cases}$$

Nous pourrons raisonner sur ces formules absolument comme nous avons raisonné sur les formules (52) et les périodes de temps T_1, T_2,.... Mais, ici nous pouvons choisir d'une façon absolument arbitraire ces périodes de temps. Nous pourrons prendre pour T_1 une saison froide, pour T_2 une saison chaude, et ainsi de suite ; ou encore ne considérer que des saisons froides. Tous les résultats que nous avons obtenus vont encore s'appliquer, sauf qu'ici, eu égard à la convexité de fond de la nappe, les contingents sont toujours décroissants. Nous croyons inutile de nous répéter en détail : les lois établies sont précisément à très-peu près les lois expérimentales indiquées ci-dessus pour les sources du Havre. Nous formulerons les résultats ainsi obtenus comme il suit [1] :

Soit une nappe superficielle dont le fond est une parabole convexe d'équation

$$z_0 = a + bx + cx^2$$

($b > 0$, $c < 0$), partie comprise entre le sommet et l'origine), dont, par suite, la pente va constamment en croissant, depuis le sommet jusqu'à la source. Admettons que cette nappe ne reçoive que des quantités d'eau uniformément réparties, provenant de la pluie.

Le débit en un point quelconque est la somme des divers contingents dus aux diverses saisons chaudes et froides précédentes, y compris la saison en cours. Si par exemple, il n'y a à tenir compte que des pluies des saisons froides, chaque contingent sera d'autant plus fort que la saison froide correspondante est plus pluvieuse. Si plusieurs années à peu près également pluvieuses se

(1) Des formules équivalentes, croyons-nous, à (52ter), ont été indiquées pour le débit par M. Boussinesq dans un cas étendu, mais, pensons-nous, différent, en général, du cas que nous traitons ici (C. R., 22 juin 1903). Elles peuvent donner lieu à la même discussion dans les limites où elles s'appliquent.

On remarquera l'analogie de ce qui précède avec la discussion des p. 28 et suiv..

succèdent, le débit deviendra une fonction à peu près périodique. A la suite d'une saison froide très pluvieuse et pendant cette saison une crue exceptionnelle se produira, et le contingent correspondant à cette saison pourra être sensible plus longtemps que d'habitude. Si cette saison est suivie d'une saison froide ordinaire ou faible comme pluies, le maximum qui doit correspondre à cette dernière pourra ne pas se produire ou être peu sensible, et la décroissance de la grande crue continuer à se manifester pendant deux ans au plus.

Ce dernier point, par exemple, se vérifie pour la source de Cérilly pendant les années 1881-1882, 1889-1890 (voir plus loin, p. 155 et tableau III).

Nous signalons, sans nous y arrêter ici, l'intérêt qu'il y a à étendre les formules (52ter) au cas où z_0 dépend de x et y, en s'appuyant sur les résultats de la p. 53.

Sur la forme des ondes souterraines et leur stabilité. — Considérons une onde souterraine qui se propage de façon que $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit toujours positif, et l'équation (21) p. 35 ($\zeta = z - z_0$)

$$(21) \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta \frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \zeta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

avec $\zeta > 0$.

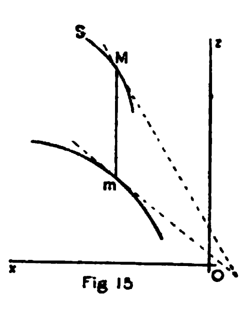


Fig 15

Supposons qu'au point M, d'abscisse x, de la surface libre S, cette courbe S soit convexe vers le haut : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y est négatif; de même pour $\zeta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Alors, si $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} > 0$, c'est-à-dire si le niveau

en M et Mm croissent avec le temps (période de crue en m), $\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$ doit être > 0; donc $\frac{\partial \zeta}{\partial x} > 0$: *les tangentes en M et m se rencontrent à droite de Mm* (fig. 15).

De même, si ζ croît avec x en m, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} > 0$, et les tangentes en M et m se rencontrent à droite de Mm. Si, en même temps, $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} < 0$ (période de décrue en m), c'est-à-dire si l'épaisseur Mm en M décroît quand t croît, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$: *la courbe S est convexe vers le haut.*

Supposons, au contraire, qu'en M S soit concave vers le haut, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$. Si $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} < 0$ (décrue en m), $\frac{\partial \zeta}{\partial x} < 0$, *et les tangentes en M et m se rencontrent à gauche de Mm.*

Enfin si ζ est fonction décroissante de x en m, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} < 0$ et les tangentes en M et m se rencontrent à gauche de Mm. Si en même temps $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} > 0$ (crue en M), $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$: *La courbe S est concave vers le haut.*

Finalement :

Dans les régions où le débit se fait constamment vers la source ou le collecteur :

1° Dans une période de crue en un point m, la convexité de la surface libre S au temps t entraîne la croissance de ζ avec x en m ; la décroissance de ζ quand x croît entraîne la concavité.

2° Dans une période de décrue en m, la concavité de S au temps t entraîne la décroissance de ζ quand x croît ; la croissance de ζ quand x croît entraîne la convexité.

Enfin on remarquera encore que, le débit étant proportionnel à $\zeta\frac{\partial z}{\partial x}$, *le débit à l'instant t est maximum ou minimum par rapport à x aux points où z et ζ ont un maximum ou un minimum par rapport à t.*

Il est particulièrement intéressant d'appliquer des raisonnements analogues aux environs des points où ζ est maximum ou minimum par rapport à x, dans une région où, par suite, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ est

aussi petit qu'on veut $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\text{ restant modéré}\right)$. Alors $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ sont forcément de même signe, à moins que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ne s'annule aussi en ces points :

Considérons un instant t et un point P ou ζ est maximum ou minimum par rapport à x. En un point assez voisin de P, s'il y a crue, la surface libre est concave, s'il y a décrue, elle est convexe, et réciproquement ; à moins que la surface libre ne présente en P un point d'inflexion ou un point analogue $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\right)$.

En particulier, si le fond est convexe, aux environs d'un maximum de ζ (par rapport à x) il y a décrue ; si le fond est concave aux environs d'un minimum de ζ *il y a crue.*

Si le fond n'est en P ni concave ni convexe $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}=0$; mais $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ en P, et, si $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\neq 0$, les conclusions restent les mêmes.

Cas d'un fond rectiligne. — Nous laisserons de côté le cas où P est un point d'inflexion pour la surface libre ; on a :

$$z=\zeta+ax+b, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=a+\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t}=\frac{\partial \zeta}{\partial x}\left(a+\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)+\zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Admettons que ζ soit un véritable maximum en P ; on peut supposer qu'en P la surface libre est convexe (c'est-à-dire que nous admettons la continuité de z et ses dérivées en P) : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\leqslant 0$.

Si $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ est négatif ; *il y a décroissance de part et d'autre de P, et l'onde s'affaisse en se propageant.*

Si $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, P n'étant pas point d'inflexion, il faut en même temps

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}=0, \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t}=0 \text{ en P.}$$

Quand $\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} < 0$, *les maxima de* ζ *par rapport à* x *au temps* t *sont en même temps des maxima* (1) *de hauteur par rapport au temps pour les points où ils sont réalisés; en ces points le débit au temps* t *est aussi maximum par rapport à* x.

On a en général, aux environs du point P, où $x = x_1$ et du temps t_1, (dans ce que nous appellerons le domaine de x_1, t_1) :

$$\left\{\begin{aligned} \zeta = \zeta_1 &+ \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial \zeta}{\partial t_1}(t - t_1) \\ &+ \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2}(x - x_1)^2 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t_1^2}(t - t_1)^2\right. \\ &\left. + 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial t_1}(t - t_1)(x - x_1)\right] + \dots, \end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord $\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x_1^4} \neq 0$: le point P étant un véritable maximum, $\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x_1^4} < 0$. Ici

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^3} = 0, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t_1} = 0.$$

De même

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\left(a + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) + \frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

$$+ \zeta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\left(a + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right]\left(a + 2\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\left(a + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right] + \zeta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\left(a + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right].$$

Le dernier membre est de la forme

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a_2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + a_3\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \zeta^2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = \zeta^2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \varepsilon_2,$$

(1) Nous allons voir qu'alors $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} < 0$, $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial t} < 0$.

où ε_2 est très petit dans le domaine de x_1, t_1. On a bien $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} < 0$, et ζ maximum par rapport au temps en P. De même,

$$\frac{1}{k} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)$$

est nul pour $x = x_1$, $t = t_1$.

$\zeta - \zeta_1$ sera de la forme

$$\zeta - \zeta_1 = \frac{1}{1.2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t_1^2} (t - t_1)^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x_1^4} (x - x_1)^4$$
$$+ \frac{1}{1!2!} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^2 \partial t_1} (t - t_1)(x - x_1)^2 + R_2,$$

où R_2 est une somme de termes très petits (aux environs de $x = x_1$, $t = t_1$) par rapport à un des trois premiers termes du 2me membre, si $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^2 \partial t_1} \neq 0$. Or

$$\frac{1}{k} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\left(a + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right] = \zeta \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \varepsilon'_2 \neq 0;$$

donc

$$\zeta - \zeta_1 = \left[\frac{k^2 \zeta_1^2}{2}(t - t_1)^2 + \frac{(x - x_1)^4}{24} + \frac{k\zeta_1}{2}(t - t_1)(x - x_1)^2\right] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x_1^4} \text{(1)} + \varepsilon''_2.$$

Dans cette formule $(x - x_1)$, $(t - t_1)$ sont seulement assujettis à être inférieurs à 2 limites fixes indépendantes l'une de l'autre.

Pour $t > t_1$, que x soit $>$ ou $< x_1$, $\zeta - \zeta_1$ est négatif : *l'onde s'affaisse en se propageant.*

Pour $t < t_1$, posons

$$k\zeta_1 \frac{t - t_1}{(x - x_1)^2} = -X,$$

(1) On a

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left[k^2 \zeta_1^2 (t - t_1) + \frac{k\zeta_1}{2} (x - x_1)^2\right] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x_1^4} + \varepsilon'''_2.$$

Dès que $t > t_1$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t} < 0$ et l'on retombe alors sur le cas le plus simple examiné tout-à-l'heure.

et considérons l'équation

$$\frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{24} = 0,$$

ou

$$X^2 - X + \frac{1}{12} = 0,$$

donc les racines sont

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{3}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}}{2} > 0;$$

désignons-les par X_1 et X_2, $X_1 < X_2$. Tant que X est inférieur à X_1 ou supérieur à X_2, $\zeta - \zeta_1$ est encore négatif, c'est-à-dire que, pour $t < t_1$, $\zeta - \zeta_1$ est encore négatif, si $|x - x_1|$ assez grand ou assez petit par rapport à $|t - t_1|$. Mais, $\zeta - \zeta_1$ était positif quand $k\,\zeta_1 \frac{t - t_1}{(x - x_1)^2}$ était compris entre $-X_1$ et $-X_2$, propriété qui avait lieu à la fois pour $x = x_1 + \lambda$ et $x = x_1 - \lambda$. Un certain temps avant le temps t_1, aux points donnés $x = x_1 + \lambda$ et $x = x_1 - \lambda$, ζ était maximum et $> \zeta_1$. *L'onde au temps t_1 en* P *résulte de la fusion de 2 ondes dont les maxima viennent coïncider en* P, *pour ne faire ensuite qu'une onde unique.*

On peut continuer de la sorte : supposons

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^3} = \dots = \frac{\partial^{2n-2} \zeta}{\partial x_1^{2n-2}} = 0;$$

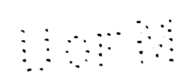
P n'étant pas point d'inflexion, il faudra que $\frac{\partial^{2n-1} \zeta}{\partial x_1^{2n-1}} = 0$; mais comme toutes les dérivées de z par rapport à x ne s'annulent pas en P, nous pouvons admettre que

$$\frac{\partial^{2n} \zeta}{\partial x_1^{2n}} \neq 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^{2n} \zeta}{\partial x_1^{2n}} < 0,$$

puisque l'onde présente un maximum en P par rapport à x.



Je dis que

$$\frac{1}{k^n}\frac{\partial^n\zeta}{\partial t^n} = A_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \ldots + A_{2n-1}\frac{\partial^{2n-1}\zeta}{\partial x^{2n-1}} + \zeta^n\frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x^{2n}}.$$

En effet, cette formule est exacte pour $n = 2$; admettons qu'elle le soit pour $n = 3, 4, \ldots, i - 1$; nous allons montrer qu'elle a lieu pour $n = i$. On a

$$\frac{1}{k^{i-1}}\frac{\partial^{i-1}\zeta}{\partial t^{i-1}} = A'_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \ldots + A'_{2i-3}\frac{\partial^{2i-3}\zeta}{\partial x^{2i-3}} + \zeta^{i-1}\frac{\partial^{2i-2}\zeta}{\partial x^{2i-2}},$$

$$\frac{1}{k^i}\frac{\partial^i\zeta}{\partial t^i} = \frac{1}{k}\frac{\partial A'_2}{\partial t}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \ldots + \frac{1}{k}\frac{\partial A'_{2i-3}}{\partial t}\frac{\partial^{2i-3}\zeta}{\partial x^{2i-3}}$$

$$+ A'_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) + \ldots + A'_{2i-3}\frac{\partial^{2i-3}}{\partial x^{2i-3}}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)$$

$$+ (i-1)\zeta^{i-2}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)\frac{\partial^{2i-2}\zeta}{\partial x^{2i-2}} + \zeta^{i-1}\frac{\partial^{2i-2}}{\partial x^{2i-2}}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right).$$

Substituons

$$\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(a + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}.$$

On obtient

$$\frac{1}{k^i}\frac{\partial^i\zeta}{\partial t^i} = A''_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \ldots + A''_{2i-1}\frac{\partial^{2i-1}\zeta}{\partial x^{2i-1}} + \zeta^i\frac{\partial^{2i}\zeta}{\partial x^{2i}},$$

ce qui est le résultat cherché.

Il en résulte que, aux environs de $x = x_1$, $t = t_1$,

$$\frac{\partial^n\zeta}{\partial t^n} = k^n\zeta^n\frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x^{2n}} + \varepsilon_n,$$

où ε_n est très-petit dans le domaine de x_1, t_1,

Ceci posé, on a

$$\zeta - \zeta_1 = \frac{(x-x_1)^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x_1^{2n}} + \frac{(t-t_1)^n}{n!}\frac{\partial^n\zeta}{\partial t^n} + \sum B_{i,j}(x-x_1)^i(t-t_1)^j + R_n,$$

où

$$0 < j < n, \qquad 0 < i < 2n, \qquad i + j \leqslant 2n,$$

et,

$$B_{i,j} = \lambda_{i,j} \frac{\partial^{i+j}\zeta}{\partial x_1{}^i \partial t_1{}^j}, \qquad \lambda_{i,j} = \frac{1}{i!\,j!}.$$

Etudions

$$\frac{\partial^{i+j}\zeta}{\partial x_1{}^i \partial t_1{}^j};$$

nous avons :

$$\frac{1}{k^j}\frac{\partial^j\zeta}{\partial t^j} = \alpha_2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \dots + \alpha_{2j-1}\frac{\partial^{2j-1}\zeta}{\partial x^{2j-1}} + \zeta^j \frac{\partial^{2j}\zeta}{\partial x^{2j}},$$

$$\frac{1}{k^j}\frac{\partial^{i+j}\zeta}{\partial x^i \partial t^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\alpha_2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) + \dots$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\alpha_{2j-1}\frac{\partial^{2j-1}\zeta}{\partial x^{2j-1}}\right) \pm \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\zeta^j \frac{\partial^{2j}\zeta}{\partial x^{2j}}\right),$$

$$\frac{1}{k^j}\frac{\partial^{i+j}\zeta}{\partial x^i \partial t^j} = \alpha'_2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \dots + \alpha'_{i+2j-1}\frac{\partial^{i+2j-1}\zeta}{\partial x^{i+2j-1}} + \zeta^j \frac{\partial^{i+2j}\zeta}{\partial x^{i+2j}}.$$

$\frac{\partial^{i+j}\zeta}{\partial x_1{}^i \partial t_1{}^j}$ est nul tant que $i + 2j < 2n$; pour $i + 2j = 2n$

$$\frac{1}{k^j}\frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x_1{}^i \partial t_1{}^j} = \zeta_1{}^j \frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x_1{}^{2n}}.$$

Les B_{ij} ne sont $\neq 0$ que si $i + 2j = 2n$. Les termes de R_n sont de la forme $\beta\,(x - x_1)^i(t - t_1)^j$, avec $i + 2j > 2n$. Ils sont forcément très-petits par rapport à un des termes de $\zeta - \zeta_1 - R_n$ dans le domaine de x_1, t_1, si $|x - x_1|$, $(t - t_1)$ sont suffisamment petits. Dès lors

$$\zeta - \zeta_1 = \left[\frac{(x - x_1)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(t - t_1)^n}{n!} k^n\zeta_1{}^n\right.$$

$$\left. + \sum \frac{k^j\zeta_1{}^j}{i!\,j!}(x - x_1)^i (t - t_1)^j\right] \frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x_1{}^{2n}} + \varepsilon_n,$$

où $i + 2j = 2n$, ε_n très petit par rapport aux termes précédents. Posons

$$\frac{t - t_1}{(x - x_1)^2} k\zeta_1 = -X,$$

et considérons l'équation

$$(-1)^n \frac{X^n}{n!} + (-1)^{n-1} \frac{X^{n-1}}{2!(n-1)!} + (-1)^{n-2} \frac{X^{n-2}}{4!(n-2)!} + \dots$$
$$+ \frac{(-1)X}{(2n-2)!\,1!} + \frac{1}{(2n)!} = 0$$

ou

$$X^n - \frac{n}{2!} X^{n-1} + \frac{n(n-1)}{4!} X^{n-2} - \dots$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1} n!\,X}{(2n-2)!} + \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} = 0.$$

Cette équation n'a pas de racines négatives : soit X_1 sa plus petite racine positive, ou un nombre arbitraire positif, si les racines sont imaginaires : au point $x = x_1 + \lambda$ (λ positif ou négatif), dans le domaine de x_1, t_1, quand t est $> t_1$, ou quand $t < t_1$ et $X < X_1$, $\zeta - \zeta_1$ est du signe de $\frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x^{2n}}$, c'est-à-dire est négatif : *l'onde s'affaisse en se propageant.*

Il nous reste à examiner ce qui se passe aux véritables minima, où $\frac{\partial^{2n-1}\zeta}{\partial x_1^{2n-1}} = 0$, $\frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x_1^{2n}} > 0$. Tous nos calculs et tous nos raisonnements y subsistent ; il y a seulement à changer le signe de la 1re des dérivées de ζ en x qui ne s'annule pas en P, à savoir le signe de $\frac{\partial^{2n}\zeta}{\partial x_1^{2n}}$, qui doit être > 0. On en conclut que, dans le domaine de x_1, t_1, on a $\zeta > \zeta_1$ pour $t > t_1$: *la dépression se relève.*

Nous pouvons résumer ainsi qu'il suit les résultats de cette discussion.

Soit une nappe souterraine superficielle ou une masse filtrante, dont le fond est rectiligne et qui ne reçoit pas d'apports extérieurs par la surface. Si la hauteur de l'eau de la nappe ou de la masse au-dessus du fond présente des maxima ou des minima à un instant quelconque t_0, aux maxima et dans les environs la hauteur au-dessus du fond décroît, aux minima et dans les environs, elle croît, lorsque t augmente. Les creux et les bosses tendent à disparaître.

Cette propriété est absolument générale, et suppose seulement que, dans l'étendue de la nappe ou de la masse considérée, celle-ci

ne reçoit pas d'eau extérieure *par la surface*. Elle s'applique aux nappes naturelles, aux filtres, au mouvement permanent (dans ce dernier cas $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ et, si $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ ou $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$) et aux petites perturbations qu'il peut subir superficiellement.

Stabilité de certains mouvements étudiés antérieurement. — Dans ce qui précède, nous avons souvent considéré des mouvements dans les nappes (nappes à régime propre permanent par exemple) tels que le débit soit à peu près nul à l'origine amont, comme cela peut probablement avoir souvent lieu dans la nature. Mais : 1° nous nous sommes fort peu préoccupé des conditions remplies par le collecteur de la nappe ou par la source (conditions à la limite aval) ; 2° nous n'avons pas toujours tenu compte des irrégularités que peut présenter la distribution de l'eau de pluie qui parvient à la nappe.

Pour rendre plus sûre ou plus problable l'extension des idées précédentes à la pratique, il faut dès lors admettre 2 postulats : 1° les conditions spéciales remplies par le collecteur ou la source ne réagissent sensiblement, dans des cas étendus, sur le mouvement de la nappe que jusqu'à une distance assez modérée à l'amont ; l'exemple des cours d'eau, où le remous d'un barrage ne s'étend que jusqu'à une distance modérée à l'amont, rend ce postulat probable, au moins pour les nappes avec pente superficielle vers l'aval ; on peut d'ailleurs, après Dupuit [1], le vérifier pour le régime permanent dans les nappes à fond rectiligne (voir plus loin, p. 108 : $X = 0$ y est indépendant de h) ; 2° des irrégularités faibles dans la distribution des eaux qui parviennent à la nappe n'altèrent pas sensiblement le régime.

Nous allons nous occuper de cette dernière question en envisageant exclusivement le cas des nappes à fond parabolique, susceptibles d'un régime propre permanent.

Stabilité malgré de petites perturbations momentanées. — Nous supposons qu'à un instant quelconque t_1 le régime propre soit réalisé : de petites perturbations se produisent alors à la surface pour une cause quelconque, par exemple dans l'arrivée des

(1) *Etudes* citées p. 238.

eaux d'infiltration. Aussitôt après le temps t_1 où se produit cette irrégularité, et où la nappe n'est plus influencée extérieurement, ζ n'est plus seulement fonction de t ; on a $\zeta = \zeta_0 + \varepsilon$, où ζ_0, fonction de t, est la valeur moyenne de ζ dans l'étendue de la nappe, ε une petite fonction de t et de x, la valeur de ε et de ses 1res dérivées en x pour $t = t_1$ étant supposées suffisamment petites. La fonction ζ remplit alors pendant un temps fini à partir de $t = t_1$ dans toute l'étendue de la nappe, sauf peut-être vers l'origine amont, les conditions spécifiées pour l'application des formules (27bis) p. 70. Le problème à traiter est encore identique à celui qui se présente quand l'irrégularité provient au temps t d'eaux d'infiltration parvenant à la nappe. On a donc, d'après les formules (50) p. 75 et la p. 81

$$v = v_2 + \chi(Y)\varphi(Y),$$

$$\zeta = \zeta_2 + \frac{\chi(Y)\varphi(Y)}{\varphi(x)},$$

$$\varphi(x) = b + 2cx = 2c(x - L), \qquad Y = F\left\{f(x) + t - t_1\right\},$$

v_2, ζ_2 constituant une solution exacte de (21) et $\chi(x)$ une petite fonction de x alternativement positive et négative (telle, par exemple, que $\int_0^L \chi(x)\,dx = 0$), et L étant la longueur de la nappe. Ici (p. 92),

$$\left\{\begin{array}{l} b + 2cL = 0, \qquad f(x) = y = \dfrac{1}{2kc}\log\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), \\ Y = L\left[1 - \left(1 - \dfrac{x}{L}\right)e^{2kc(t - t_1)}\right], \\ \varphi(Y) = -2c(L - x)\,e^{2kc(t - t_1)}. \end{array}\right.$$

Quand le temps croît, Y croît : la valeur de $\chi(Y)$ va se transmettre intégralement vers l'aval. Mais cette irrégularité est multipliée en chaque point par $\varphi(Y)$ qui décroît quand t ou x croît ; d'une part l'influence d'une irrégularité donnée sur le débit est d'autant moins sensible que le point où elle a lieu est plus à l'amont (x plus grand) ; d'autre part le débit en un point tend à se régulariser quand le temps croît, c'est-à-dire que les petits écarts

réalisés pendant l'intervalle de temps τ en un point dans le débit se retrouveront en un point à l'aval pendant un intervalle τ postérieur [1] Les maxima des écarts de $\zeta - \zeta_2$ en un point diminuent quand le temps croît, si au temps t_1 ils étaient égaux en un certain nombre de points à l'amont. On a

$$\frac{\partial (\zeta - \zeta_2)}{\partial x} = \frac{\left[\frac{\partial \chi (Y)}{\partial x} \varphi (Y) + \chi (Y) \frac{\partial \varphi (Y)}{\partial x}\right] \varphi (x) - \varphi' (x) \chi (Y) \varphi (Y)}{\varphi (x)^2}.$$

Or posons $M = e^{2kc (t - t_1)}$:

$$\frac{\partial \varphi (Y)}{\partial x} = 2cM, \qquad \varphi (Y) = - 2c (L - x) M,$$

$$\varphi (x) \frac{\partial \varphi (Y)}{\partial x} - \varphi' (x) \varphi (Y) = 2c (x - L). 2cM +$$

$$+ 2c. 2c (L - x) M = 0,$$

$$\frac{\partial (\zeta - \zeta_2)}{\partial x} = \frac{\partial \chi (Y)}{\partial x} \frac{\varphi (Y)}{\varphi (x)} = \frac{\varphi (Y)}{\varphi (x)} \chi' (Y) M.$$

Quand t croît, M $\frac{\varphi(Y)}{\varphi (x)}$ diminue en chaque point ; $\frac{\partial (\zeta - \zeta_2)}{\partial x}$ devient ce qu'était $\chi' (x)$ à une certaine distance à l'amont, mais réduit dans une certaine proportion, car $\frac{\varphi (Y)}{\varphi (x)} \leqslant 1$, $M < 1$.

De même

$$\frac{\partial^2 (\zeta - \zeta_2)}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{\partial^2 \chi (Y)}{\partial x^2} \varphi (Y) + \frac{\partial \chi (Y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi (Y)}{\partial x}\right) \varphi (x) - \varphi' (x) \frac{\partial \chi (Y)}{\partial x} \varphi (Y)}{\varphi (x)^2}$$

$$\varphi (x) \frac{\partial \varphi (Y)}{\partial x} - \varphi' (x) \varphi (Y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 (\zeta - \zeta_2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi (Y)}{\partial x^2} \frac{\varphi (Y)}{\varphi (x)} = M^2 \frac{\varphi (Y)}{\varphi (x)} \chi'' (Y),$$

et la remarque faite pour $\frac{\partial (\zeta - \zeta_2)}{\partial x}$ est applicable à $\frac{\partial^2 (\zeta - \zeta_2)}{\partial x^2}$.

[1] On se place toujours dans un certain domaine aux environs de (x_1, t_1).

Admettons alors que les raisonnements précédents sont applicables dans l'intervalle de temps t_1 à $t_1 + \tau_1$ et sur la longueur de o à L_1 ($L_1 < L$).

1° Si, sur la longueur de L_1 à L il n'y avait pas de perturbations au temps $t = t_1$, le raisonnement devient applicable à toute la nappe : au temps $t_1 + \tau_1$, l'état est analogue à ce qu'il était au temps t_1, avec des circonstances plus favorables, en général, puisque $\zeta - \zeta_2$ et ses 2 1res dérivées en x sont égales à ce qu'elles étaient à une certaine distance à l'amont $\times$ M_1, et $M_1 \leqslant e^{2kct}$. En prenant comme état initial cet état au temps $t_1 + \tau_1$, on peut recommencer le raisonnement etc : *l'influence des perturbations de cette nature s'atténue constamment avec le temps.* Il en sera de même si, vers l'origine amont, $\chi(x)$ et ses deux 1res dérivées, au lieu d'être nulles, tendent vers o suffisamment vite quand x croît au voisinage de $x = L$.

2° Dans le cas général, on voit que l'influence des petites perturbations qui se produisent en un point quelconque de la nappe tend à s'atténuer dès que cette influence se fait sentir vers l'aval, assez loin de l'origine amont.

Il existe un autre procédé de démonstration plus parfait à certains égards. Posons

$$z = z_0 + (A + \varepsilon)\, e^{2kct},$$

où $\frac{\varepsilon}{A}$ est assez petit pour $t = t_0$. On a d'après (21)

$$\frac{1}{k}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \zeta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \text{avec} \qquad \zeta = z - z_0.$$

$$\frac{1}{k}\left[(A + \varepsilon)\, 2kc\, e^{2kct} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} e^{2kct}\right] = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} e^{2kct}\left[b + 2cx + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} e^{2kct}\right]$$
$$+ (A + \varepsilon)\, e^{2kct}\left[2c + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} e^{2kct}\right],$$

ou

$$\frac{1}{k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left[b + 2cx + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} e^{2kct}\right]\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + (A + \varepsilon)\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}.$$

Au temps $t = t_0$, aux environs d'un maximum (d'un minimum) de ε ou ζ par rapport à x, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$, et, en général,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} < 0 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} > 0 \right);$$

ε décroît (croît) quand t croît, pourvu que $\left| \frac{\varepsilon}{A} \right| < 1$, ce qui a lieu a fortiori si $\frac{\varepsilon}{A}$ est petit. Il resterait à traiter le cas où $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = 0$ (comp. p. 97) : nous n'insistons pas ici.

Ces conclusions resteront exactes pendant un temps fini τ ; au temps $t_0 + \tau$ les conditions initiales $\left(\left| \frac{\varepsilon}{A} \right| \text{ petit} \right)$ étant encore plus favorables, le même raisonnement est à fortiori applicable ; et ainsi de suite.

Sur les mouvements permanents. — Nous allons résumer ici un certain nombre de résultats indiqués dans la 1re rédaction de notre mémoire (8 Mai 1903) et relatifs aux mouvements permanents dans les nappes ou filtres.

L'équation (21) donne pour le mouvement permanent.

$$(53) \qquad (z - z_0) \frac{dz}{dx} = \mu = C^{te}, \text{ (}\mu\text{ proportionnel au débit)}$$

d'où

$$(54) \qquad \mu \frac{dx}{dz} = z - z_0,$$

équation différentielle linéaire intégrable dans un certain nombre de cas.

Fond horizontal : $z_0 = 0$. — L'intégrale est alors

$$z^2 = 2\mu x + h^2 \text{ (Dupuit)},$$

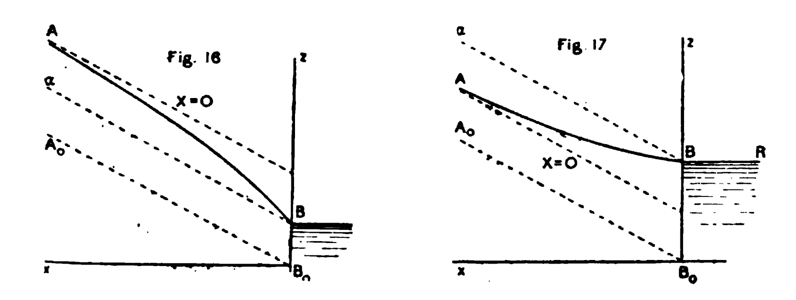
et la surface libre est une parabole. Cette propriété nous a servi de base pour une étude approximative du régime propre des nappes à fond horizontal (p. 37).

Fond rectiligne : $z_0 = ax$. — L'intégrale est alors

$$x - \frac{z}{a} + \frac{\mu}{a^2} = \left(\frac{\mu}{a^2} - \frac{h}{a}\right) e^{\frac{a}{\mu}(h - z)} \text{ (Dupuit)};$$

h est l'ordonnée à l'origine, le niveau dans le collecteur. La surface libre présente les dispositions suivantes : 1°, $\frac{\mu}{a} - h > 0$. La courbe est asymptote à $X = ax - z + \frac{\mu}{a}$ et au-dessous de cette droite. Elle est au-dessus de $B\alpha$ qui a pour équation $z - ax - h = 0$ et qui passe par B. La hauteur de l'eau au-dessus du fond, mesurée parallèlement à Oz, croît constamment avec x. Si $\zeta = z - ax$, à l'origine

$$h \frac{d\zeta}{dx_{x=0}} = a\left(\frac{\mu}{a} - h\right) > 0.$$



2°, $\frac{\mu}{a} - h = 0$. La surface libre a pour équation $z = ax + \frac{\mu}{a}$; la nappe a une épaisseur constante et égale à h.

3°, $\frac{\mu}{a} - h < 0$. La courbe est asymptote à $X = 0$ et au-dessus de cette droite. Elle est au-dessus de $B\alpha$ qui pour équation $z - ax - h = 0$ et qui passe par B. La hauteur de l'eau au-dessus du fond, mesurée parallèlement à Oz, décroît constamment quand x croît. On a à l'origine

$$h \frac{d\zeta}{dx_{x=0}} = a\left(\frac{\mu}{a} - h\right) < 0.$$

Fond parabolique. — $z_0 = ax + bx^2$. — (54) devient

$$\mu \frac{dx}{dz} = z - ax - bx^2. \tag{55}$$

C'est une équation de Riccatti, où x est la fonction, z la variable. On peut l'intégrer à l'aide des fonctions de Bessel.

Faisons le changement de variables

$$x = X - \frac{a}{2b}, \quad z = \frac{\mu Z}{b} - \frac{a^2}{4b}, \tag{56}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{dX}\frac{dX}{dZ}\frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dZ}\frac{b}{\mu},$$

X et Z désignant ici des coordonnées courantes ;

$$b\frac{dX}{dZ} = \frac{\mu Z}{4b} - \frac{a^2}{4b} - a\left(X - \frac{a}{2b}\right) - b\left(X - \frac{a}{2b}\right)^2$$

$$= \frac{\mu Z}{b} - bX^2,$$

ou

$$\frac{dX}{dZ} + X^2 = \frac{\mu}{b^2} Z = k_1 Z.$$

La nouvelle transformation (Rouché et Lévy, *Analyse*, t. II, p. 607).

$$X = \frac{1}{u}\frac{du}{dZ} \tag{57}$$

donne

$$\frac{dX}{dZ} = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dZ}\right)^2 + \frac{1}{u}\frac{d^2u}{dZ^2},$$

d'où

$$\frac{d^2u}{dZ^2} = k_1 u Z.$$

Faisons enfin le dernier changement de variables (Jordan, *C. Anal. imprimé Ecole Pol.*, t. III, 1887, p. 239) :

$$u = Z^{\frac{1}{2}} y_1, \qquad Z = -\left(\frac{3}{2}x_1\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{k_1}}, \tag{58}$$

on obtient l'équation de Bessel

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{1}{x_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \left(1 - \frac{1}{3^2x_1^2}\right)y_1 = 0,$$

et

$$(59)\quad u = Z^{\frac{1}{2}}y_1 = Z^{\frac{1}{2}}\left[cJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-k_1}\,Z^{\frac{3}{2}}\right) + c'J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-k_1}\,Z^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

$J_{\frac{1}{3}}(x)$, $J_{-\frac{1}{3}}(x)$ désignant les 2 intégrales classiques de l'équation de Bessel ci-dessus.

Finalement l'intégrale est définie par les équations (56) à (59) avec la condition initiale $z = h$ pour $x = 0$. Ce n'est là d'ailleurs, provisoirement, qu'un résultat théorique.

Mouvement permanent quelconque. — Si $\zeta_0 = z - z_0$, (53) donne pour un mouvement permanent quelconque

$$\zeta_0\frac{d(\zeta_0 + z_0)}{dx} = (z - z_0)\frac{dz}{dx} = \mu_0, \quad (\mu_0 = c^{te}).$$

Prenons

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1, \qquad \zeta_1 = F(x, t);$$

d'après (21)

$$\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta\frac{\partial(\zeta + z_0)}{\partial x}\right].$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\zeta_0 + \zeta_1)\frac{\partial(\zeta_0 + \zeta_1 + z_0)}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\zeta_0 + \zeta_1)\frac{\partial(\zeta_0 + \zeta_1 + z_0)}{\partial x} + (\zeta_0 + \zeta_1)\frac{\partial^2(\zeta_0 + \zeta_1 + z_0)}{\partial x^2},$$

$$= \frac{\partial\zeta_0}{\partial x}\frac{\partial(\zeta_0 + z_0)}{\partial x} + \zeta_0\frac{\partial^2(\zeta_0 + z_0)}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial(\zeta_0 + z_0)}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_0}{\partial x}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x},$$

$$+ \frac{\partial\zeta_1^2}{\partial x^2} + \zeta_1\frac{\partial^2(\zeta_0 + z_0)}{\partial x^2} + (\zeta_0 + \zeta_1)\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}.$$

Dans ce dernier membre, la somme des 2 premiers termes est nulle. Négligeons $\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2$ et $\zeta_1 \frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}$ supposés très-petits relativement; il reste

$$(\alpha) \quad \frac{1}{k}\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\left(\frac{dz_0}{dx} + 2\frac{d\zeta_0}{dx}\right) + \zeta_1\left(\frac{d^2\zeta_0}{dx^2} + \frac{d^2z_0}{dx^2}\right) + \zeta_0\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}.$$

Cette équation et l'équation précédente admettent chacune une solution ζ_1 qui, pour $t = 0$, se réduit à $\zeta_2(x)$. Si $\left|\frac{\zeta_2}{\zeta_0}\right|$ et $\left|\frac{d\zeta_2}{dx}\right| : \left|\frac{d\zeta_0}{dx}\right|$ sont petits, les 2 solutions restent très-voisines dans un domaine x, t comprenant la valeur $t = 0$.

Cherchons alors une solution de la dernière équation de la forme

$$\zeta_1 = e^{-At}\,\psi(x) = e^{-At}\,\zeta_2(x),$$

d'où

$$-\frac{A}{k}\psi = \psi'\left(\frac{dz_0}{dx} + 2\frac{d\zeta_0}{dx}\right) + \zeta_0\psi'' + \psi\left(\frac{d^2\zeta_0}{dx^2} + \frac{d^2z_0}{dx^2}\right);$$

$$(\beta) \quad \left(\frac{A}{k} + \frac{d^2\zeta_0}{dx^2} + \frac{d^2z_0}{dx^2}\right)\psi + \left(\frac{dz_0}{dx} + 2\frac{d\zeta_0}{dx}\right)\psi' + \zeta_0\psi'' = 0.$$

Si l'on ne suppose pas la nappe indéfinie, et si z_0, $\frac{dz_0}{dx}$, $\frac{d^2z_0}{dx^2}$, ζ_0, $\frac{d\zeta_0}{dx}$, $\frac{d^2\zeta_0}{dx^2}$ ne possèdent aucun point critique à distance finie, pour x réel et positif ou pour $x \leqslant \xi$, ζ_0 ne possédant aucun o pour $x \leqslant \xi$ (ξ limité > 0), on sait que ψ est fini pour x positif $\leqslant \xi$.

Posant successivement $A = m + ni$ ($m > 0$), $A = m - ni$, on obtiendra deux solutions dont la demi somme

$$\zeta_3 = e^{-mt}\left[e^{-nit}\,\psi_1(x) + e^{nit}\,\psi_2(x)\right]$$

est une solution réelle, et décroît en valeur absolue quand t croît, soit si t est assez grand, soit, pour $t = 0$, si $\left|\frac{m}{n}\right|$ est assez grand. En faisant varier m et n, et remarquant que la somme de plusieurs

solutions de (α) est une solution, on voit *qu'il y a une infinité de perturbations momentanées qui tendent à s'atténuer avec le temps*(1).

Supposons encore que dans (α) $\zeta_0 = \zeta_0^{(1)} + \varepsilon$ où $\zeta_0^{(1)}$ est constant, et que

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\, \frac{d\zeta_0}{dx},\ \zeta_1\, \frac{d^2\zeta_0}{dx^2},\ \varepsilon\, \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}$$

soient petits dans un certain domaine par rapport à un au moins des autres termes du 2me membre de (α); (α) devient

$$(\alpha')\ \frac{1}{k}\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \zeta_1 \frac{d^2 z_0}{dx^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{dz_0}{dx} + \zeta_0^{(1)} \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2},$$

et (β)

$$(\beta')\ \left(\frac{A}{k} + \frac{d^2 z_0}{dx^2}\right)\psi + \frac{dz_0}{dx}\psi' + \zeta_0^{(1)}\psi'' = 0\ (^2).$$

On est conduit aux mêmes conclusions.

(1) La démonstration complète de la stabilité pourrait résulter de la connaissance pour les équations (β) d'une formule analogue à celle de Fourier pour les équations différentielles $\frac{d^2y}{dx^2} + A_2 y = 0$ (A paramètre > 0 susceptible d'une infinité de valeurs). Il y a là un remarquable problème d'analyse, problème que l'on peut d'ailleurs se poser pour toute famille d'équations différentielles dépendant d'un paramètre arbitraire, en cherchant à définir les familles qui donnent lieu à un théorème analogue à celui de Fourier.

Ce problème sera posé dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens.*

ψ contenant un facteur constant arbitraire aussi petit qu'on veut, on peut toujours satisfaire aux conditions supposées pour $\zeta_2(x)$.

(2) Certains cas particuliers conduisent à des équations intéressantes au point de vue analytique ; 1° si $z_0 = \alpha(x+\beta)^s - \gamma$, (β') devient

$$\left[\frac{A}{k} + s(s-1)\,\alpha\,(x+\beta)^{s-2}\right]\psi + \alpha s\,(x+\beta)^{s-1}\psi' + \zeta_0^{(1)}\psi'' = 0$$

Supposons $s - 1 = \frac{p}{q}$ (p, q entiers, $s > 0$), et faisons le changement de variables $(x+\beta)^{\frac{1}{q}} = y$. On obtient l'équation

$$\psi\left[\frac{A}{k}y^{2q-2} + s(s-1)\,\alpha y^{p+q-2}\right] + \psi'_y\left[\frac{s\alpha}{q}y^{p+q-1} + \frac{\zeta_0^{(1)}}{q}\left(\frac{1}{q}-1\right)y^{-1}\right] + \frac{\zeta_0^{(1)}}{q^2}\psi''_{y^2} = 0.$$

Cas où les mouvements sont moins réguliers [1] qu'on ne l'a supposé jusqu'ici. — Examen d'une hypothèse plus naturelle sur le mouvement de l'eau dans les nappes. — Considérons une nappe souterraine et une verticale Mm dans cette nappe depuis la base m jusqu'à la partie supérieure M. En chaque point

Ici $s - 1 = \frac{p}{q} > -1$, $p + q > 0$, et l'on peut poser $q > 0$. Les intégrales de cette équation différentielle sont régulières au sens de Fuchs : le seul point critique possible à distance finie est $y = 0$ (Jordan, *Cours d'analyse* de l'Ecole Polytechnique).

2° Si z_0 est un polynome, (β') devient une équation analogue dont la solution générale est une fonction entière ou un polynome (Comp. *Ann. Fac. Toul.*, 1902, p. 468).

3° Soit $z_0 = l\,(1 - \cos mx)$,

$$\frac{dz_0}{dx} = ml \sin mx, \qquad \frac{d^2 z_0}{dx^2} = m^2 l \cos mx.$$

Le fond, quand x croît à partir de 0, est successivement concave, puis convexe jusqu'à $mx = \pi$, etc.

(β') devient

$$(\beta'') \qquad \psi\left[\frac{A}{k} + m^2 l \cos mx\right] + ml \sin mx\, \psi' + \zeta_0(1)\, \psi'' = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques. Son intégrale I, puisque $\zeta_0(1)$ est constant, est une fonction entière, car (β'') n'a aucun point critique à distance finie d'après un théorème de Fuchs. On a

$$I = e^{\gamma_1 x}\, \rho_1(x) + e^{\gamma_2 x}\, \rho_2(x)$$

[γ_1, γ_2 constantes, ρ_1, ρ_2 fonctions périodiques de périodes $2\varpi = \frac{2\pi}{m}$; comp. Picard, *Traité d'Anal.*, t. III, Paris, 1896, p. 407 : on le voit ainsi : en général (β'') possède deux intégrales indépendantes $F_1(x)$, $F_2(x)$ telles que

$$F_1(x + 2\varpi) = e^{2\varpi\gamma_1} F_1(x), F_2(x + 2\varpi) = e^{2\varpi\gamma_2} F_2(x).$$

Alors

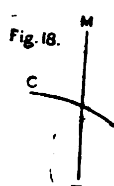
$$F_1(x + 2\varpi)\, e^{-\gamma_1(x+2\varpi)} = F_1(x) e^{-\gamma_1 x} = \rho_1(x) \text{ a pour période } 2\varpi = \frac{2\pi}{m}\Big].$$

Pour $A = 0$, (β'') admet la solution périodique $\psi_1 = e^{\frac{l}{\zeta_0(1)}\cos mx}$ et la solution $\psi_2 = \psi_1 . \int e^{-\frac{l}{\zeta_0(1)}\cos mx}\, dx$. Si le besoin s'en fait sentir, on pourra d'après M. Poincaré (Picard, loc. citat., t. III, p. 165) chercher à voir si (β'') n'a pas de solutions périodiques quand $|A|$ est assez petit.

[1] A partir d'ici la 1re rédaction de notre mémoire, soumise à l'Académie des Sciences le 8 mai 1903, a été entièrement conservée (quelques renvois ou notes au bas des pages seuls ont été modifiés).

M_1 de mM où passe un filet fluide, sa vitesse a une direction déterminée par le canal capillaire C_1 très mince, et peut-être très sinueux, que peut suivre ce filet.

Le mouvement étant rapporté à un système d'axes rectangulaires fixes, soient, au temps t, u_1, v_1, w_1 les valeurs des composantes de la vitesse en M_1, vitesse dirigée suivant le petit canal C_1. Suivons le filet fluide dans son mouvement : u_1, v_1, w_1, vont varier ; mais nous pourrons admettre que ces variations sont fréquentes à cause des changements fréquents et rapides de direction que subit la trajectoire du filet. Si l'on prend pour un petit parcours pendant le temps τ à partir de M_1 les moyennes de u_1 par exemple, cette moyenne u sera finalement bien déterminée. Soient alors u, v, w les valeurs moyennes des 3 composantes ; la résultante est ce que nous appelons la *vitesse moyenne locale fictive* correspondant [1] au point M_1.



Le mouvement sera permanent quand cette vitesse ne dépend pas du temps, variable dans le cas contraire.

Au lieu de suivre la molécule dans son mouvement, on peut aussi considérer par le point M un élément de droite $M_1M_2 = 2\lambda$ orienté d'une manière quelconque, mais la même pour tous les points du fluide, et contenant M qui en est le milieu [2]. La vitesse moyenne aura pour composante

M_2 — M — M_1

Fig. 19.

$$u = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{+\lambda} u_1 dl, \qquad v = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{+\lambda} v_1 dl, \qquad w_1 = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{+\lambda} w_1 dl,$$

le long de cette droite, les éléments de l'intégrale correspondant à des points de M_2M_1 qui font partie de la matière solide étant nuls.

[1] On reconnaît là une adaptation dans le cas des nappes souterraines des idées de M. Boussinesq (*Eaux courantes*, p. 24) pour les mouvements des eaux courantes. Mais tandis que M. Boussinesq a à prendre des moyennes pour un même point dans le temps, nous les prenons, nous, dans l'espace, le long d'un filet fluide, d'une droite ou à l'intérieur d'une surface ou d'un volume.

[2] On pourrait aussi essayer de prendre pour M la moyenne, relative au volume limité par une petite sphère de centre M et de rayon λ des composantes des vitesses moyennes u, v, w, relatives à chaque direction M_1M_2 issue de M.

On a

$$\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\lambda}^{+\lambda} u_1 dl = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial x}dl = \frac{\partial u}{\partial x},$$

ce qui suppose seulement, en dehors des hypothèses précédentes, que les dimensions des canaux capillaires sont très grandes par rapport à la dimension et à l'écartement des molécules. L'équation de continuité se conserve donc pour ces moyennes des vitesses composantes, et

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Une vérification sommaire, sur laquelle nous n'insistons pas, parce que nous comptons revenir plus en détail sur ce point ultérieurement, nous a montré que les autres équations du mouvement se conservent.

On est conduit finalement encore aux équations (12) p. 46 de l' « *Essai sur la théorie des eaux courantes* » de M. Boussinesq [1].

[1] Il semble que des procédés de raisonnement semblables soient applicables à l'étude : 1° de l'équilibre d'un sol élastique formé de matériaux de petites dimensions de diverses natures mélangés d'une façon intime (de façon par exemple qu'il y ait une densité, une résistance à la rupture, etc, moyenne constante en chaque point, ou peu variable d'un point à un autre) ; 2° de l'équilibre d'une masse de mortier formé de petites parties de sable, de carbonate de chaux, etc. ; 3° de l'équilibre même d'une masse de béton. En effet, on définira encore par le même procédé que tout-à-l'heure les valeurs moyennes en chaque point, des petits déplacements de chaque point, des dérivées de ces déplacements, de la dilatation cubique, etc. Les équations de l'élasticité se conserveront pour ces valeurs moyennes.

On peut d'ailleurs admettre qu'en chaque point il existe une résistance moyenne à la rupture par traction, compression, etc, qui dépend des proportions dans lesquelles sont mélangés les diverses matières qui forment le milieu considéré.

Finalement on pourra raisonner sur toutes ces valeurs moyennes sans se préoccuper du fait de la non homogénéité du milieu.

Nous n'oserions prétendre au surplus que cette extension des équations de l'élasticité aux milieux non homogènes soit absolument neuve, *bien que nous le croyons.*

M. J. Resal a depuis longtemps proposé d'appliquer le calcul aux maçonneries, comme on le fait pour les métaux, (loi du trapèze, *Ponts en maçonnerie*, 1re partie, stabilité des voûtes, Paris, Baudry, 1887, p. 36). Ce qui précède est une justification théorique de l'idée de M. J. Resal. (Comp. encore J. Resal, *Constructions métall.*, Paris, 1892, p. 12).

CHAPITRE VI

—

SUR LA PRÉVISION ET LA PRODUCTION DES BAS DÉBITS DES COURS D'EAU ET DES SOURCES

Relations entre certains phénomènes des cours d'eau et des sources et la pluie. — Considérons un point C d'un cours d'eau : le niveau N y est à chaque instant fonction des quantités de pluies par seconde antérieures et de l'évaporation. Soient

$$dh = f(x, y, t)\,dt,$$
$$de = f_1(x, y, t)\,dt,$$

les quantités de pluie et d'eau évaporée (1) pendant le temps dt au point x, y, z de la surface du bassin B qui alimente le point C, cette surface étant rapportée à 3 axes rectangulaires.

Soit Q le débit en C à l'instant t : le volume dV emmagasiné par B pendant le temps dt est

$$dV = -Q\,dt + \sum_{x,y} d(h - e) :$$

c'est *l'équation de continuité du bassin* B.

La quantité $d(h - e)$ pénètre ou non dans les canaux capillaires du sol. Dans certains cas une partie est absorbée ou non par le sol à titre d'eau d'imbibition : cette partie $d(h - e)$ met un temps θ_t à parvenir à la nappe : θ_t est une fonction d'x et y et de l'état de la nappe, ainsi que de l'imbibition antérieure du sol, lesquels résultent des valeurs antérieures de f et de f_1.

(1) Nous y comprenons, bien entendu, les quantités perdues pour une cause quelconque (végétation, etc).

L'on peut d'ailleurs considérer aux environs de x, y, z les quantités h et e comme variant peu au temps t, ainsi que cet état d'imbibition et l'état de la nappe : soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de la nappe où parvient la quantité $d(h - e)$ ainsi diminuée au temps $t + \theta_t$: x_1, y_1, z_1, θ_t sont fonctions de $f - f_1$, *c'est-à-dire* ([1]) *sont déterminés quand* $f - f_1$ *l'est* : nous écrivons ceci symboliquement

$$x_1, y_1, z_1, \theta_t = \varphi_1 (f - f_1).$$

Dans les autres cas, l'eau ruisselle à la surface, une partie s'évapore, et une certaine portion arrive aux cours d'eau et s'écoule. Toutes les circonstances du mouvement dépendent encore de $f - f_1$.

Finalement le niveau N, qui est une fonction des valeurs successives de x_1, y_1, z_1, de $h - e$ et du ruissellement est une fonction de $f - f_1 = f_2$. Une fois la fonction $f - f_1$ donnée, N est en effet, connu à chaque instant.

Négligeons provisoirement le ruissellement. On peut admettre que l'effet de $d(h - e)$ sur le niveau N sera d'autant plus faible que l'instant où dh est tombé est plus éloigné de l'instant t_1 où N a lieu. En fait, pour le point C considéré, et pour une valeur donnée de x, y, z, N ne dépend que des hauteurs $d(h - e)$ réalisées avant l'instant θ, θ étant une fonction qui dépend de x, y, z, de l'état d'imbibition du sol, de la nappe, mais qui est parfaitement déterminée pour B à chaque instant quand on connaît $f_2 = f - f_1$. L'effet de $d(h - e)$ est $\varphi(t_1 - t, x, y, z, t_1) d(h - e)$, φ étant nul pour $t \geqslant \theta$, et étant, au moins jusqu'à une certaine valeur de t une fonction décroissante de $t_1 - t$ qui décroît assez vite quand $t_1 - t$ croît, c'est-à-dire, t_1 étant donné, une fonction croissante de t. L'effet total, c'est-à-dire le niveau N, sera alors

$$\mathrm{N} = \sum_{x, y\, z,\, t} d(h - e)\, \varphi(t_1 - t, x, y, z, t_1).$$

La fonction φ dépend bien entendu du point x, y, z, mais, pour chaque valeur de x, y, z elle n'est fonction que de f_2.

([1]) Nous faisons ici l'hypothèse que, si des circonstances identiques se reproduisent, des phénomènes identiques se reproduisent.

Les hypothèses physiques que nous faisons sont alors les suivantes.

1°, $t_1 - \theta$ est limité supérieurement : l'effet de $d(h-e)$ commencera toujours à se faire sentir au bout d'un temps assez limité eu égard à l'étendue du bassin.

2° sauf peut-être pour un intervalle assez court, φ décroît constamment quand $t_1 - t$ croît, pour des valeurs de t_1, x, y, z, données ; t_1, x, y, z, étant donnés, φ est d'autant plus petit que $t_1 - t$ est plus grand. De plus on doit admettre que la fonction φ dépend des pluies tombées avant le temps θ, de façon à avoir des valeurs légèrement croissantes si l'on faisait croître la hauteur de ces pluies. Nous savons, en effet, que, dans beaucoup de terrains la portion de la hauteur de pluies pendant un même temps qui profite à la nappe augmente un peu plus rapidement que cette hauteur (comp. p. 141, plus loin). 3° quand les variations de l'état d'imbibition du sol et de l'état de la nappe sont assez lentes, une croissance de $d(h-e)$ pour une ou une série de valeurs de t dans dans tout ou partie du bassin aura pour conséquence une croissance de N. Autrement dit ,nous admettons que si une partie au moins des valeurs de $h-e$ qui déterminent N avaient été plus fortes, N eût été plus fort. Par suite N aura la même valeur à l'instant t_1 si l'on fait croître, t et t_1 restant constants, $h-e$ pour certaines valeurs de x, y, z, et si on le fait décroître pour d'autres. En d'autres termes il existe pour chaque valeur de t_1 et t une valeur moyenne $d(h_1 - e_1)$ de $d(h-e)$, indépendante de x, y, z, qui produit le même effet que la fonction f_2 sur N, c'est-à-dire que l'on peut substituer à chaque instant à f_2 et $d(h-e)$ une fonction $f_3(t_1, t)$, la même pour tous les points du bassin. Cette valeur est évidemment comprise entre les valeurs extrêmes de $d(h-e)$ à l'instant t. C'est ce qu'on peut appeler *la hauteur moyenne de pluies utile relative à t_1 à l'instant t pour le bassin.*

On peut raisonner de même par rapport au temps : si donc l'on considère pour une valeur de x, y, z un intervalle de temps fini et la partie de la somme correspondante

$$\sum_t d(h-e)\,\varphi,$$

on pourra écrire

$$\sum_t d(h - e)\,\varphi = (\mathrm{H} - \mathrm{E})\,\Phi,$$

si

$$\mathrm{H} - \mathrm{E} = \sum_t d(h - e);$$

pendant le même temps.

Imaginons au temps t_1 une courbe ayant en chaque point d'un plan pour ordonnée φ, pour abscissse [1] $\sigma = \int_0^t d(h - e)$. En général l'ordonnée φ va constamment en croissant avec t (hypothèse 2°), par suite avec σ, et la valeur de Φ n'est autre que la hauteur du rectangle de base ab équivalent à l'aire ABba, Oa et Ob étant les valeurs extrêmes de σ, Aa et Bb les valeurs extrêmes de φ. La valeur de Φ est donc intermédiaire entre les valeurs extrêmes Aa et Bb.

Pour tout intervalle de temps Δt on pourra dès lors, au point x, y, z remplacer $\sum_t d(h - e)\,\varphi$ par $[\mathrm{H} - \mathrm{E}]\,\Phi$: nous supposerons la croissance de φ quant t croît suffisamment régulière, ce qui a toujours lieu, par exemple quand la nappe par laquelle l'eau se transmet au cours d'eau est suffisamment puissante. Alors

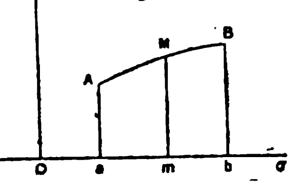


Fig. 20.

$$\mathrm{A}a \leqslant \Phi \leqslant \mathrm{B}b.$$

Φ pourra d'ailleurs être parfaitement égal à peu près à Aa ou Bb si la chute de pluie H — E s'est produite à peu près en entier au commencement ou à la fin de l'intervalle de temps considéré. Si l'on prend pour Φ une valeur Φ_1 intermédiaire entre Aa et Bb, par exemple $\frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}b}{2}$, l'erreur commise en plus ou en moins en rem-

[1] La courbe AB présentera des discontinuités pour toutes les périodes où il ne pleut pas $[d(h - e) = 0]$. Mais, *dans nos climats*, si *ab* est assez grand, six mois par exemple, M*m* croîtra en général d'une façon moyenne assez régulière.

plaçant $\sum_t d(h - e)\, \varphi$ par $(H - E)\, \Phi_1$ sera au plus égale à

$(H - E) \dfrac{Bb - Aa}{2}$ en valeur absolue.

Si l'intervalle de temps est assez court eu égard à la nature des phénomènes, l'erreur relative commise

$$\frac{(H - E) \dfrac{Bb - Aa}{2}}{(H - E)\, \Phi} = \frac{Bb - Aa}{2\Phi} \leqslant \frac{Bb - Aa}{2Aa}$$

pourra être faible, pourvu que Aa soit notable par rapport à $Bb - Aa$. C'est ce qui arrivera, par exemple, pour les pluies des saisons froides antérieures qui ne précèdent pas immédiatement la période où N est réalisé [1]. Pour le vérifier de plus près il est d'ailleurs ici assez rigoureux de substituer à φ une expression approchée qui changera fort peu la forme de la courbe AB. On pourra, par exemple, supposer pour φ une expression de la forme $\dfrac{1}{a - bt}$ $(a, b > 0)$; on pourra encore supposer $\varphi = \mu k^{t - t_1}$, ou prendre des formes plus compliquées.

Enfin nous supposerons que la variable t_1 n'entre dans φ que grâce à la différence $t_1 - t$, c'est-à-dire que l'effet de $d(h - e)$ sur N à l'instant t_1 est proportionnel à $d(h - e)$ et à une fonction des $t_1 - t, x, y, z$ seuls, quels que soient t_1 et t [2]. C'est ce que nous appellerons *l'hypothèse de l'indépendance des petits effets des pluies élémentaires sur le niveau N.*

On pourrait peut-être faire remarquer que nous avons négligé ci-dessus des périodes exceptionnellement pluvieuses où φ pourra avoir une valeur plus forte, mais encore, sauf au début, croissantes dans les mêmes conditions. Un raisonnement presque semblable sera applicable à ces périodes : les valeurs des coëfficients a, b, μ, k, φ pourront seulement être différentes. Au point de vue hydrologique cela revient à dire : les périodes exceptionnellement pluvieuses peuvent avoir sur N une influence relativement plus forte que ne

(1) Nous supposerons que φ est très-lentement variable avec t, au moins dès que $t_1 - t$ dépasse une certaine limite.

(2) On peut aussi se contenter d'admettre l'exactitude de cette hypothèse pour des valeurs de t_1 prises vers la même époque de la même année (dans un même mois par exemple) quelle que soit l'année.

l'indiquerait la hauteur H — E correspondante, ou encore la quantité $\frac{Aa + Bb}{2}$: les périodes exceptionnellement sèches auraient plus ou moins un effet contraire, moins marqué, il est vrai, parce que le phénomène n'est pas absolument réversible et [1] que les valeurs négatives de $h - e$ sont forcément faibles, l'évaporation ne pouvant agir que sur les couches superficielles du sol.

Finalement nous pouvons conclure :

Dans l'étude de l'influence des pluies et de l'évaporation sur les bas niveaux [2] *N en un point d'un cours d'eau à un moment donné de l'année, on peut avec une grande approximation regarder N pour les pluies suffisamment anciennes comme ne dépendant que des totaux de pluie et de l'évaporation totale pendant des périodes assez longues, par exemple pendant les saisons chaudes et froides, sans tenir compte de la répartition des pluies pendant ces périodes.*

Nous n'avons tenu compte ici que des pluies qui pénètrent immédiatement dans la nappe : mais il arrivera forcément [3] : 1° s'il y a des parties imperméables, que des eaux ruisselleront jusqu'à des terrains perméables (bétoires par exemple, cas de la Dhuis, etc., p. 160) : 2° que les affluents des cours d'eau et le cours d'eau lui-même réagiront par moments sur la nappe qui les borde et exerceront un influence.

Dans le 1er cas les eaux qui ruissellent ne doivent entrer en ligne de compte que conformément à la théorie développée plus haut. Pour le bassin de la Vanne, par exemple, ces eaux sont généralement en quantités insignifiantes (Belgrand, la Seine, études hydrologiques, Paris, 1872, p. 17) : pour les étendues peu perméables, l'eau $d(h - e)$ se divise en deux parties suivant les époques, une partie qui est absorbée de suite et à laquelle un certain coëfficient φ est applicable; une autre absorbée plus loin avec une autre valeur du coëfficient φ; ce cas rentre encore dans notre formule; mais les variations de φ pourront être un peu moins régulières.

(1) Il ne l'est en partie que grâce à la capillarité, d'autant moins que la nappe est plus profonde.

(2) Les hauts niveaux sont souvent influencés par le ruissellement.

(3) Il ne s'agit ici que de terrains en majorité perméables.

Suivant le plus ou moins grand degré de perméabilité du terrain et la plus ou moins grande quantité d'eau qui ruisselle, les valeurs moyennes de φ pour des périodes assez longues seront peut être évaluées un peu moins exactement par les procédés précédents : les mêmes conclusions resteront vraies avec plus de réserves.

Passons au 2me cas. On peut, pour l'examiner, appliquer la théorie qui précède à une partie CD de cours d'eau suffisamment voisine de la source D pour que l'on puisse négliger l'influence spéciale que peuvent exercer les variations de la partie de la nappe immédiatement voisine de CD, et qui est influencée par les niveaux du cours d'eau ; considérer ensuite un point C_1 plus éloigné, et le niveau N_1 en C_1, comme fonctions d'une part des quantités $d(h - e)$ qui parviennent directement à la partie CC_1 sans passer par CD, d'autre part aussi des niveaux N en C ; et ainsi de suite.

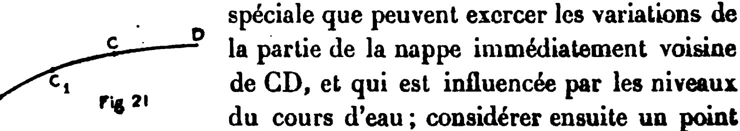


Fig 21

Rien n'empêche également d'appliquer la théorie générale à un point quelconque d'un cours d'eau. Elle tient compte de l'influence de la nappe n, et conduit seulement à renforcer le coëfficient φ pour les points C de plus en plus éloignés vers l'aval du cours d'eau, ou à lui conserver une valeur appréciable pendant un temps plus long. Le niveau en C_1 au t_1 dépend en effet en partie du niveau de la nappe qui borde le cours d'eau, ce niveau en partie du niveau en C au temps t_2 auparavant, $t_1 - t_2$ pouvant avoir une valeur assez grande, si CC_1 est assez grand. Toutes les quantités $d(h - e)$ qui ont contribué au niveau en C au temps t_2 contribueront donc d'une manière plus ou moins sensible au niveau en C_1 au temps t_1. En d'autres termes : plus le point considéré sur un cours d'eau est éloigné de la source, plus est étendue la période des pluies qui y déterminent les niveaux des basses eaux ; plus lente sera la variation d'une année à l'autre du niveau à une même époque de l'année *dans la période des basses eaux*.

Mais, d'une part, il est bien évident que ceci laisse de côté les périodes où les eaux de ruissellement parviennent directement aux cours d'eau, c'est-à-dire que, en général ceci ne sera applicable sûrement qu'aux basses eaux ; d'autre part, être obligé de faire intervenir pour la détermination du niveau en C_1 un laps de temps

plus long qu'en C, cela revient à attribuer à la fonction φ une décroissance moins rapide quand $t_1 - t$ croît. D'après ce que nous avons vu page 119, le niveau dépendra encore plus exactement des quantités H — E et d'un plus grand nombre d'entre elles : (car les pluies d'un plus grand nombre d'années interviendront d'une manière sensible). Chaque année exercera ainsi une influence relative d'autant moins nette en C_1 que C_1 sera plus vers l'aval : les variations de pluie d'une année à l'autre agiront d'autant moins pour faire varier le niveau en C_1 que C_1 sera plus vers l'aval.

Ceci posé, considérons en particulier un cas où, comme dans le bassin de la Seine, les bas niveaux ou les bas débits sont réalisés en général dans le deuxième semestre de l'année, à peu près de juillet-août à novembre ou décembre. Les pluies de la saison froide précédente sont déjà assez éloignées pour qu'on puisse, au moins pour un certain nombre de points C, avec plus ou moins d'exceptions dues aux répartitions exceptionnelles de la pluie, considérer N comme fonction seulement du total H — E pour cette saison froide. Pour les pluies plus rapprochées de mai, juin juillet, août, l'évaporation étant généralement forte (au moins 2 millimètres par jour [1]), leur influence sera presque toujours faible : s'il pleut, les pluies fourniront une partie de l'évaporation, le reste étant emprunté à l'eau d'imbibition superficielle. S'il ne pleut pas, ce sera encore l'eau d'imbibition qui la fournira, et la nappe y contribuera peu. Il faudra des pluies fortes ou une sécheresse accentuée pour qu'il en soit différemment. L'influence de ces quatre mois sera d'autant plus forte que E est plus faible pour chacun d'eux, c'est-à-dire que mai et juin influeront plus facilement; une certaine compensation pourra toutefois résulter du fait que ces mois sont plus éloignés que juillet et août. Pour un point C suffisamment à l'aval d'ailleurs, l'influence de ces derniers mois ne sera sensible que si les pluies y sont générales et fortes ; le cas échéant, on pourra en tenir compte. Pour les années antérieures on est conduit à raisonner de même ; les pluies d'été interviendront en général peu : on en tiendra encore compte en considérant les totaux H — E correspondants des saisons chaudes, conformément aux raisonnements antérieurs.

[1] Voir par exemple nos notes sur la prévision des crues du Grand Morin (*Ann. Soc. Météor.*, 1901, p. 60) et de la Marne à Chaumont (*Mém. Assoc. fr.*, Congrès d'Ajaccio 1901).

Il en sera toutefois différemment quand le bassin comprend à la fois des étendues sérieuses de terrain perméables et de terrains imperméables. Dans ces derniers, le point de ruissellement est atteint chaque hiver : il peut subsister quelquefois par moments en été [1]. Ces terrains, quand le point de ruissellement est atteint, fournissent en C une portion déterminée, toujours la même, du débit : si ce point de ruissellement cesse d'être réalisé, cette portion diminue; si le ruissellement se produit, cette portion augmente. Si C est suffisamment à l'aval, les eaux de ruissellement auront une certaine influence sur N, niveau supposé réalisé bien plus tard, en agissant sur la nappe qui borde le cours d'eau ; mais cette influence sera évidemment plus faible, à quantité d'eau égale, que celle de l'eau des nappes.

D'autre part les nappes des terrains imperméables sont bien moins puissantes que celles des terrains perméables : si le bassin B comprend en outre sensiblement plus de terrains perméables que d'imperméables, on voit finalement que l'influence sur N des terrains imperméables sera beaucoup moins forte que celle des terrains perméables, en laissant bien entendu de côté le cas où des ruissellements sérieux se produiraient au moment où N est réalisé, ce qui n'arrive pas très souvent en été ou, en tout cas, n'a lieu que par moments.

Finalement l'influence des terrains inperméables pourra alors être négligée : il en est d'ailleurs un peu tenu compte par ce fait que l'on considère N comme fonction croissante des quantités H — E et que la faible influence des terrains imperméables croît à peu près dans le même sens que H, pour un bassin B d'étendue assez limitée pour que le régime des pluies n'y soit pas trop différent d'un point à un autre.

Remarquons encore que pour le bassin B, l'effet des saisons chaudes sera moindre que celui des saisons froides qui les suivent.

Enfin on pourra considérer E comme assez peu variable d'une année à l'autre, en général.

N est une fonction des quantités $H_1 - E_1$, $H_2 - E_2, \ldots, H_k - E_k$, pour k saisons froides précédentes, et $H'_1 - E'_1, \ldots, H'_{k'} - E'_{k'}$ pour k' saisons chaudes précédentes. On suppose d'ailleurs à peu

[1] Voir les deux mêmes notes.

près $E_1 = \ldots = E_k = E$, $E_1' = \ldots = E'_{k'} = E'$, E, E′ c^tes^. Dès lors N sera une fonction de $H_1, \ldots, H_k$, H′, $H'_1, \ldots, H'_{k'}$. Nos raisonnements s'appliqueront non-seulement au niveau N, mais à un certain nombre d'autres phénomènes, par exemple au niveau moyen pendant 1 mois, 2 mois, etc., au débit correspondant, au niveau minimum pendant la saison chaude, etc.; ils s'appliqueront évidemment aux sources pour lesquelles les valeurs de k et k' seront plus petites.

Finalement nous aboutirons à cette loi.

Loi I. — *Un certain nombre de faits hydrologiques correspondant aux bas niveaux ou aux bas débits des sources ou des cours d'eau dépendra à peu près exclusivement dans bien des cas des totaux* (1) *des pluies de plusieurs des saisons chaudes et froides précédentes.*

L'influence de la saison froide immédiatement précédente ou des deux saisons froides immédiatement précédentes prédominera d'autant plus que le bassin d'alimentation correspondant au point considéré sera moins étendu. Plus il sera étendu, au contraire, et plus le nombre d'années dont dépendent ces faits sera grand (2).

Les saisons chaudes précédentes interviendront moins que les saisons froides qui les suivent. Les saisons froides et les sai–

(1) C'est là principalement ce que nous ajoutons ici aux résultats antérieurement connus sur l'influence des pluies des saisons froides et chaudes sur N. On savait (Dausse, Belgrand, etc.) que N dépendait de ces pluies, avec prédominance des pluies de tel ou tel terrain; mais on n'avait, croyons-nous, indiqué aucune manière approximative de définir par des formules N en fonction de ces pluies. La théorie n'était que *qualitative* : la loi ci-dessus la rend *quantitative* en montrant que N est fonction des *totaux* de pluie.

(2) Pour un point situé suffisamment à l'aval dans un bassin la nappe qui s'étend sur les bords de la rivière et des affluents contribue à régulariser les niveaux des basses eaux et à les rendre peu variables d'une année à l'autre (sauf le cas de très-fortes pluies d'été).

Dans les terrains très-perméables d'ailleurs il est même bien démontré maintenant, croyons-nous, que cette nappe joue un rôle régulateur important pour les crues d'été. Des formules d'annonces de crues du service hydrométrique du bassin de la Seine (Babinet, *Oise à Venette*, *Résumé des Observations du service pour* 1891, *Ann. Soc. Météor. de France*, 1893, p. 30, par exemple), qui donnent les montées en un point d'un cours d'eau en fonction linéaire des montées en deux stations d'amont au moins, ont des coefficients d'autant plus forts que la saturation des terrains du bassin est plus avancée.

sons chaudes interviendront d'autant moins qu'elles seront plus antérieures : cette réduction d'influence sera d'autant plus faible que le bassin sera plus étendu.

Les pluies des mois de printemps et d'été qui précèdent immédiatement le phénomène pourront intervenir comme élément pertubateur, si elles sont fortes et générales.

Ceci suppose toutefois que les terrains perméables dominent dans le bassin. Pour un bassin presque entièrement perméable, on pourra souvent négliger les pluies des saisons chaudes antérieures (1).

Cet énoncé comprend comme cas particulier la loi de Dausse et les principes qui ont servi de base à diverses reprises à Belgrand, MM. G. Lemoine, de Préaudeau, Babinet, etc., pour l'annonce des sécheresses et des bas débits exceptionnels. Il est d'accord avec nos calculs antérieurs, en particulier avec la formule (18), p. 32, d'où l'on pourrait d'ailleurs déduire un cas particulier étendu de cette loi.

Applications pratiques de la théorie précédente à la prévision des mêmes phénomènes, — La quantité H-E qui intervient dans nos raisonnements est une fonction de x, y, z. E variant peu d'une année à l'autre, il suffira de se préoccuper de H. On lui substituera une valeur moyenne pour le bassin par exemple la moyenne arithmétique ou géométrique d'un certain nombre de stations (2).

Théoriquement, si l'on admet la loi de Fournié au moins pour les moyennes, les diverses quantités H seront proportionnelles, les coëfficients de proportionnalité des saisons chaudes et froides restant les mêmes pour deux stations données d'une année à l'autre.

(1) Le raisonnement fait ici a l'avantage de ne comporter aucune hypothèse sur la forme de la surface du bassin, des fonds des nappes, des collecteurs de ces nappes, etc.

(2) Comp. par ex. von Tein, Hochwasserverhältnisse im Rheingebiet, VI Heft, Berlin 1901, étude de la relation entre H et les hauteurs des crues du bassin du Main, p. 126, 130, 132, etc.

Or, d'après l'analyse précédente le niveau N est une fonction de la forme

$$N = C + \sum_{i,\, x,\, y,\, z} H_i\,(x, y, z)\,\psi_i\,(x, y, z), \qquad (C\ c^{te}),$$

H_1, H_2,... se rapportant à des saisons froides ou chaudes différentes. On a d'un point x_0, y_0, z_0. donné à un autre x, y, z, $H_i\,(x, y, z) = k_i\,(x, y, z)\,H_i\,(x_0, y_0, z_0)$, $H_i\,(x_0, y_0, z_0)$ étant une quantité mesurée par l'expérience à la station x_0, y_0, z_0,

$$N = C + \sum_i H_i \sum_{x,\, y,\, z} k_i\,(x, y, z)\,\psi_i(x, y, z).$$

$\sum_{x,\, y,\, z} k_i\,(x, y, z)\,\psi_i\,(x, y, z)$ est alors un coëfficient spécial au bassin pour chaque valeur de i, et qui satisfait aux mêmes lois de réduction avec les années, pour l'été et l'hiver respectivement si $k_i\,(x, y, z)$ ne dépend pas de i (d'après la loi de Fournié). On peut aussi supposer que k_i a une valeur spéciale pour l'été et l'hiver, ou que la loi de Fournié n'est qu'approximativement vraie : les conclusions sont à peu près les mêmes.

Finalement nous obtenons la formule pratique

$$N = C + \sum_i \mu_i H_i + \sum_i \mu'_i H'_i,$$

H'_i correspondant aux saisons froides, H_i aux saisons chaudes pour une station déterminée du bassin B, μ_i ou μ'_i étant un coëfficient d'autant plus petit que la saison correspondante à H_i ou H'_i est plus antérieure respectivement : μ_i sera généralement petit par rapport à μ'_i.

Ceci ne s'applique toutefois peut-être pas aux périodes très pluvieuses ou très sèches : si ψ_i est une fonction légèrement croissante de H_i, et si l'on considère des valeurs de H_i variant dans des limites assez étendues (du simple au quadruple au plus) il sera plus exact de poser

$$\psi_i = \alpha_i + \beta_i\,H_i^{\lambda}, \qquad (\lambda > 0).$$

Alors

$$N = C + \sum_{i,\,x,\,y,\,z} H_i\, k_i.\ \left\{ \alpha_i + \beta_i\, (k_i\, H_i)^{\lambda} \right\},$$

$$N = C + \sum_i H_i \sum_{x,\,y,\,z} k_i\, \alpha_i + \sum_i H_i^{1+\lambda} \sum_{x,\,y,\,z} k_i^{1+\lambda}\, \beta_i.$$

Finalement, λ étant bien déterminé, on obtient la formule

$$N = C + \sum_i A_i H_i + \sum_i B_i H_i^{1+\lambda} + \sum_i A'_i H'_i + \sum_i B'_i H'^{\,1+\lambda}_i,$$

les A_i, B_i se rapportant aux saisons chaudes, les A'_i, B'_i aux saisons froides. B_i est relativement petit par rapport à A_i de même que β_i par rapport à α_i, A_i et B_i étant d'autant plus petits que la saison correspondant à H_i est plus antérieure (de même pour A'_i, B'_i, H'_i) ; on pourra supposer que λ ne soit pas le même pour les saisons froides et chaudes.

Il sera souvent suffisant dans les limites de la pratique de prendre $\lambda = 1$, le coëfficient β_i étant déterminé en conséquence. On est ainsi conduit à poser

$$N = C + \sum_i (A_i\, H_i + B_i\, H_i^2) + \sum_i (A'_i\, H'_i + B'_i\, H'^{\,2}_i).$$

On peut tirer de cette formule une conclusion intéressante : les coëfficients B_i sont *forcément* positifs. De plus les A_i et les B_i, d'après les hypothèses faites sur φ, sont des fonctions décroissantes de $t' - \tau_i$, t' étant l'instant où N a lieu (ou l'instant moyen si N est une valeur moyenne), τ_i l'instant où la hauteur $\frac{H_i}{2}$ est réalisée pendant la saison correspondante : on pourra prendre pour τ_i à peu près le milieu de cette saison si $t' - \tau_i$ est assez grand (tout ceci se justifierait au besoin quand $t' - \tau_i$ est assez grand par des raisonnements analogues à ceux que nous avons fait précédemment). Ces fonctions A_i et B_i de $t' - \tau_i$ tendent vers o assez rapidement quand $t' - \tau_i$ croît indéfiniment.

Eu égard aux propriétés de ces fonctions A et B on pourra toujours les représenter avec une grande approximation pour les

trois ou quatre premières années par des expressions de la forme $ae^{-b(t'-\tau_i)}$. On a

$$N = C + A_1 H_1 + A_2 H_2 + A_3 H_3 + A_4 H_4 + \ldots,$$

en négligeant $A_5 H_5 +, \ldots$

Soit N_1 le niveau analogue à N l'année suivante, N_1 étant supposé réalisé à la même date dans cette année, H_0 la hauteur de pluie de la saison froide précédente :

$$N_1 = C + \alpha''_0 H_0 + \alpha''_1 H_1 + \ldots + \alpha''_4 H_4 + \ldots.$$

Ici

$$\alpha_0'' = A_1, \; \alpha''_1 = A_2, \; \ldots.$$

Si $(t' - \tau_i)$ est exprimé en années,

$$A_2 = A_1 e^{-b} = A_1 d, \qquad (d < 1)$$

$$A_3 = A_1 d^2, \ldots,$$

$$\alpha''_1 H_1 + \ldots = d (A_1 H_1 + A_2 H_2 + \ldots),$$

d'où, à peu près,

$$N_1 = C + \alpha''_0 H_0 + d (N - C) + \ldots,$$

c'est-à-dire finalement

$$N_1 - d N = C (1 - d) + A_1 H_0 + B_1 H_0^2 + A'_1 H'_0 + B'_1 H'^2_0.$$

N_1 est à peu près fonction de N et des hauteurs de pluies des saisons froides et chaudes précédentes : on pourra ajouter à cette expression un terme correctif résultant des pluies de mai, juin, etc. On peut même parfois négliger la saison chaude précédente dont l'influence est déjà marquée dans N. Donc par exemple :

LOI II. — *En un point d'un cours d'eau le niveau minimum d'une année est à peu près une fonction du niveau minimum de l'année précédente et des hauteurs de pluie de la saison froide précédente et des quelques mois précédents de la saison chaude* [1],

[1] Ceux-ci ne doivent d'ailleurs entrer en ligne de compte que s'ils sont très pluvieux ou très secs. Ce qui précède constitue une nouvelle démonstration approximative du résultat énoncé p. 32-33.

pourvu que le bassin d'alimentation ne contienne qu'une faible proportion de terrains imperméables.

On conclut en particulier de tout ce qui précède, en remarquant que les moyennes de pluies décennales dans le bassin de la Seine ne présentent que des variations lentes :

Pour beaucoup de cours d'eau, le niveau minimum annuel en un point doit varier peu d'une année à l'autre (sauf l'influence des terrains imperméables dans les étés pluvieux) : il faudra une suite de plusieurs années ou de plusieurs saisons froides plus pluvieuses ou plus sèches pour amener des modifications, d'ailleurs lentes et progressives dans le temps.

En particulier, du fait que les moyennes de pluies ont assez peu varié à Paris depuis un siècle [1] on peut conclure vraisemblablement :

Loi III. — *Dans le bassin de la Seine, les basses eaux, en un point donné de beaucoup de cours d'eau à bassin presque entièrement perméables, ne doivent présenter que des différences très faibles avec une valeur moyenne séculaire. Ces différences ne pourront être brusques que grâce à l'influence immédiate d'étés pluvieux dans les terrains imperméables du bassin d'alimentation ; sinon, elles seront progressives et dues à une variation progressive de la moyenne des pluies depuis un certain nombre d'années. Sous ces réserves, une variation sensible dans le niveau des basses eaux en ce point est due à d'autres causes que des causes météorologiques* [2].

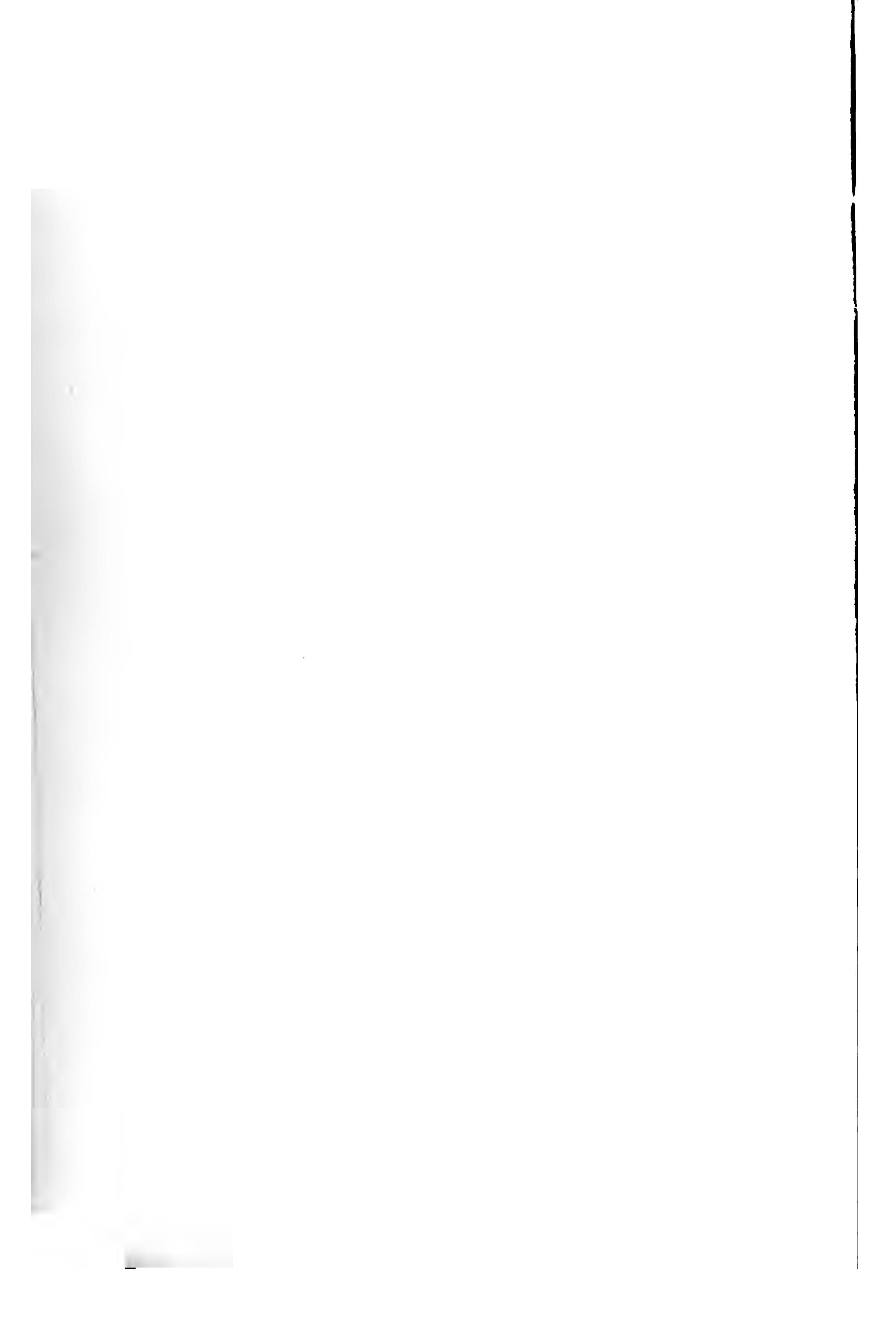
Les vérifications expérimentales ne manquent pas : bien des sources même y satisfont (Dhuis et certaines sources de la Vanne,

[1] Voici par exemple, d'après M. Raulin (*Atlas météor. de l'Observatoire de Paris*, 1872-1874, D. 18) et nos calculs, les moyennes pour les périodes 1804-10, 1810-20, 1820-30, 1830-40, 1840-50, 1850-60, 1860-70 à l'Observatoire de Paris (Terrasse) : 508, 497, 514, 508, 529, 520, 492.

[2] Eu égard aux idées développées, par exemple, par M. Martel, et dont nous avons dit quelques mots plus haut (p. 10), nous croyons que la démonstration théorique de cette loi, surtout si on peut l'étendre à d'autres bassins, a un certain intérêt géologique au point de vue des eaux souterraines.

voir plus loin, p. 160) Le fait, sinon l'explication, a d'ailleurs, croyons-nous, été remarqué et signalé depuis longtemps par les Ingénieurs des rivières [1], puisqu'il a aidé à fixer à peu près les zéros des échelles hydrométriques.

[1] Voir par exemple les *Résumés annuels* des observations du service hydrométrique du bassin de la Seine (Seine à Gomméville, Ource à Autricourt, Yonne à Clamecy, Marne à la Chaussée).



DEUXIÈME PARTIE

PARTIE PRATIQUE [1]

CHAPITRE VII

INTRODUCTION

Nous nous proposons dans ce qui suit d'indiquer un certain nombre d'applications pratiques des idées et des théories qui précèdent à la prévision de divers phènomènes hydrologiques, et aussi quelques vérifications expérimentales.

Nous prendrons à peu près constamment pour base les travaux de Belgrand, les observations recueillies et étudiées par le service hydrométrique central du bassin de la Seine et les publications de ce service (Belgrand, G. Lemoine, etc.). C'est dire l'importance de ces dernières et tout le parti que l'on peut en tirer. C'est leur étude qui nous a conduit d'abord à un certain nombre de constatations expérimentales et de graphiques de prévisions, qui nous a donné ensuite l'idée des théories précédentes, et ce sont ces dernières qui nous ont permis de trouver les graphiques de prévision des sources de Cérilly et Armentières (Vanne) indiqués plus loin, et aussi la prévision des bas niveaux de la Marne à la Chaussée.

(1) Tout ce qui suit, sauf une ou deux notes datées, faisait partie de la 1re rédaction de notre mémoire, soumise à l'Académie des Sciences le 8 mai 1903. Un certain nombre des renvois seulement a été modifié.

Pour permettre aux praticiens de lire facilement ce qui suit, nous l'avons rédigé d'une façon pour ainsi dire indépendante des théories mathématiques précédentes. Nous avons renvoyé autant que possible dans des notes au bas des pages ou entre parenthèses l'indication détaillée des liens qui unissent les 2 parties. Nous croyons d'ailleurs que la plupart des praticiens, pour peu qu'ils aient quelques connaissances mathématiques (*cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*), pourront lire assez facilement au moins la première moitié de la partie théorique précédente (jusqu'au chap. IV), quitte à passer les détails de calculs à un ou deux endroits.

Les principaux résultats obtenus par nous dans ce qui suit sont :

1° *Résultats théoriques.* — Pour certains terrains, l'accroissement total N du niveau de la nappe dû aux pluies de la saison froide, de total H, est de la forme

$$N = a + bH + cH^2, \qquad (c > 0),$$

ou

$$N = M(H + C)^s, \qquad (M > 0,\ s > 1).$$

Pour certains terrains, si la saison froide des années A — 1 et A est exceptionnellement pluvieuse, elle peut renforcer les débits que la théorie permettrait de calculer pour la saison chaude de l'année A + 1, à cause de la porosité des matériaux de ce terrain.

2° *Résultats pratiques.* — Les dates des tarissements des sources de la Somme à Sommesous peuvent être assez souvent prévues dès le 1er Mai.

Ils est possible, conformément à une théorie de la première partie d'établir un graphique donnant les débits de la source de Cérilly (Vanne) à partir du maximum de mai, juin ou juillet jusqu'aux pluies préparatoires de la fin de l'année (vers novembre). Ce graphique qui nous a précisément été inspiré par la théorie en question, et qui la vérifie dans tous ses détails avec une précision inespérée, est basé surtout sur des considérations mécaniques.

D'autres graphiques basés sur des considérations météorologiques, mais comportant moins de précision, permettent des prévisions analogues. Ceci s'étend à la source d' « Armentières et Drains » (Vanne).

Des considérations de même nature s'appliquent à la Dhuis.

La façon dont les saisons chaudes et froides interviennent en pratique dans la détermination des niveaux minima annuels de la Marne à la Chaussée est conforme aux indications théoriques de la 1re partie. Il est possible dans certains cas de faire une prévision au sujet de ces niveaux dès le 1er Mai.

Nous étudions en terminant les influences qui agissent sur les dates des tarissements annuels de la Laignes (Côte d'Or) et leur importance, et nous indiquons le régime des sources alimentant la ville du Havre, à titre de vérification expérimentale des théories de la première partie.

Enfin nous signalons une très curieuse relation qui existe depuis une trentaine d'années entre les totaux de pluies des saisons chaudes dans le bassin de la Seine et la hauteur maxima des crues des saisons froides suivantes [1].

[1] Un mémoire annexe, d'ordre plutôt pratique, a été ajouté ultérieurement.

CHAPITRE VIII

PROPORTION DES PLUIES QUI PROFITENT A UNE NAPPE SOUTERRAINE

Considérons un bassin rempli superficiellement d'un terrain perméable, et supposons-le arrosé au début de la saison froide d'une certaine quantité d'eau δ répartie à peu près uniformément dans le temps et l'espace, la nappe du terrain n'étant pas supposée atteindre la surface du sol. Deux cas seront à distinguer.

Cas d'un terrain fissuré et spongieux. — 1° *Le terrain a des fissures nombreuses et est formé de masses* M *homogènes juxtaposées assez minimes et poreuses ou spongieuses ou susceptibles d'absorber une certaine quantité d'eau.*

Nous remarquerons d'abord que ce sera probablement le cas général des terrains calcaires très-fissurés : si l'on se reporte, par exemple, à une note des *Annales des Ponts-et-Chaussées* [1], certains moëllons de calcaires tendres ou grossiers peuvent absorber par décimètre cube jusqu'à 140 à 335 grammes d'eau, les calcaires durs 120 à 170, les meulières 80 à 200, le grès 15. L'absorption maxima jusqu'à saturation se produit (sous certaines pressions) pour les premiers au bout de 2 à 6 heures d'immersion dans l'eau, pour le grès au bout de 2 heures. La *dessiccation est très-lente* : les calcaires tendres ne perdent que le $\frac{1}{12}$ de l'eau d'absorption au bout de soixante-quatre heures, les meulières les $\frac{4}{5}$, les calcaires durs le $\frac{1}{3}$.

[1] C. Tollet, 1890, 1er semestre, p. 489.

Dès lors, pour le terrain considéré, suffisamment fissuré, dans bien des cas l'eau δ va se diviser en deux portions : l'eau qui imbibera les masses M, l'eau qui remplira les fissures ou y circulera.

A la suite de la saison chaude, ou de périodes de sécheresses, l'eau δ servira d'abord surtout à imbiber les masses M plus ou moins desséchées. Le niveau de la nappe dans les débuts des chutes δ de pluie ne montera que peu ou très-lentement.

Mais le terrain va peu à peu s'imbiber : alors les quantités δ fourniront de moins en moins d'eau d'imbibition, de plus en plus d'eau de circulation, c'est-à-dire de celle qui détermine le niveau de la nappe, la pression en un point, le débit des puits ou des sources, etc.

Suivant que les masses M seront plus ou moins spongieuses, ou d'autres circonstances, il pourra se faire que l'imbibition soit à peu près terminée sans que le niveau de la nappe atteigne le sol, c'est-à-dire sans qu'il y ait ruissellement; ou, au contraire, que l'imbibition ne soit pas terminée quand le niveau de la nappe atteint le sol. Dans ce dernier cas, surtout si l'absorption de l'eau par les masses M est assez lente, et si δ est assez fort, les canaux capillaires des fissures pourront être gorgés d'eau sans que l'imbibition soit terminée. En d'autres termes, le ruissellement n'implique pas que l'imbibition soit complète ou inversement. Au surplus le ruissellement n'implique même pas que les canaux capillaires soient remplis, si le sol ne peut absorber toute l'eau qui tombe à un certain moment.

Mais ce dernier cas, qui est exceptionnel, étant laissé de côté, on voit qu'il arrivera souvent ceci : au fur et à mesure que la quantité d'eau absorbée par imbibition est moindre, une plus grande quantité d'eau dans l'unité de temps va profiter à la nappe : l'accroissement de niveau pendant l'unité de temps sera fonction croissante du temps [1]. Nous pouvons ainsi énoncer cette loi :

[1] M. Meurdra, *Mém. Assoc. fr.*, Congrès du Havre, 1877, Sources du Hâvre, a indiqué comme cause plus partielle de variation de cet accroissement de niveau avec le temps, le siphonnement dans les petits canaux, capillaires ou non, alimentant une source. On peut classer à certains égards cette cause comme un cas particulier de celle que nous étudions ici et comme jouant le même rôle que la porosité. Une cavité qui emmagasine l'eau par moments joue le rôle d'une masse poreuse. Cette cavité à la suite d'une saison froide pluvieuse, pourra restituer par siphonnement une partie de son eau ; mais on peut dire

LOI I. — *Soit un terrain formé de masses homogènes juxtaposées susceptibles d'absorber l'eau, et entre lesquelles existent des fissures où l'eau peut circuler. Si l'on verse sur ce terrain une quantité d'eau constante δ par seconde uniformément répartie, l'accroissement du niveau de la nappe aquifère en un point est une fonction croissante du temps.*

Pour un pareil terrain, dans la nature, plus la saturation sera proche, et plus une même quantité de pluie donnera un accroissement de niveau fort.

Ceci posé [1], au lieu de considérer un temps variable d'arrosage du terrain avec δ constant, comme pour la loi I, faisons varier δ en considérant un temps total d'arrosage constant. Le raisonnement restera identiquement le même si les variations de δ ne sont pas

aussi qu'une masse poreuse équivalente, exerce annuellement une action sur la quantité normale de pluie et n'en exerce pas sur l'excès de pluie de la saison froide pluvieuse; au point de vue du débit, l'effet est le même. Une saison froide pluvieuse suivie d'une saison froide ordinaire peut produire la continuation des siphonnements pendant cette dernière, et aussi une diminution de l'eau nécessaire à l'imbibition (p. 142) au début de la 2e saison froide, dans les deux cas une augmentation de débits à la suite de la 2e saison froide. Nos raisonnements n'excluent en rien d'ailleurs les siphonnements dans des conduits plus ou moins minces où la loi de la vitesse est la même (comp. Boussinesq, *Eaux courantes*, additions, p. 10), siphonnements qui ne sont qu'une des formes de mouvement des eaux de la nappe. Ceci nous permet de conclure que *dans bien des cas la forme exacte suivant laquelle une source est alimentée par un terrain perméable ou fissuré est plus ou moins indifférente ; on pourra souvent se contenter de l'hypothèse d'une nappe parfaite dans ces terrains perméables au point de vue du débit : les résultats seront souvent les mêmes* (sauf la valeur φ [formule (20)] du rapport du vide au volume). L'intérêt de cette remarque résulte par exemple soit de la brochure de M. Meurdra, soit de l'existence de diverses théories relatives aux sources ou à la Fontaine de Vaucluse en particulier de diverses communications de M. Martel à l'Académie des Sciences (Voir par exemple Pochet, Fontaine de Vaucluse, *Bull. Hydr. agr.*, fasc. Y, 1901, p. 194, Martel, *loc. cit.* et C. R., 10 novembre 1902, p. 815). Ce qui précède n'infirme d'ailleurs en rien l'hypothèse de rivières souterraines jouant le rôle de canaux découverts ou de tuyaux, puisque notre théorie les admet au contraire comme collecteurs de la nappe (p. 9). Au surplus nous espérons revenir ultérieurement sur la théorie de la Fontaine de Vaucluse en particulier sur un important mémoire de M. Dyrion (*Bull. Hydr. agric.* fasc. Q, 1894, p. 69).

[1] Nous rappelons que Belgrand (*La Seine, études hydr.*, p. 262) a appelé *point de saturation* l'état d'imbibition des terrains perméables au moment où les pluies commencent à profiter aux nappes souterraines. Ceci semblerait

trop considérables (du simple au double ou au triple environ), à condition que l'on se place toujours dans une saison où l'évaporation est assez faible (saison froide), ou encore l'évaporation ou l'évaporation totale constante.

Désignons par δ_1 une autre valeur de δ; nous avons

$$\delta_1 = k\,\delta,$$

où k est compris entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$ par exemple. Au bout du temps t, $t = 0$ correspondant à l'origine de l'arrosage, l'accroissement total N' du niveau de la nappe sera à peu près ce qu'était l'accroissement N du niveau correspondant à δ au bout du temps kt, sauf l'influence de l'évaporation supposée constante. Si

$$N = f(t) - Et, \quad N' = f(kt) - Et$$

($-Et$ influence de l'évaporation). Or, attribuons à t une valeur fixe et faisons varier k : N' est une fonction de kt ; d'après la loi I, $\frac{dN'}{d(kt)}$ croît avec kt, c'est-à-dire ici avec k, quand t est donné :

$$\frac{d^2N'}{d(kt)^2} = \frac{\partial^2 N'}{\partial k^2}\, t^{-2} > 0,$$

en sorte que

$$\frac{\partial^2 N'}{\partial k^2} > 0.$$

Donnons en particulier à t la valeur T représentant la durée de la saison froide; $\frac{\partial^2 N'}{\partial k^2} > 0$, ou, puisque k est proportionnel à $H = kT\delta$ (δ étant constant)), $\frac{\partial^2 N'}{\partial H^2} > 0$. N' est une fonction de $H = k\delta T$ dont la dérivée croît avec H.

admettre que, dans les débuts des pluies δ, toute l'eau est absorbée par l'imbibition, et que cette eau ne commence à profiter à la nappe que quand l'imbibition est terminée. Nous ne croyons pas que la distinction soit aussi absolue : Belgrand ne l'a sans doute entendue que d'une manière approximative. Cela suffit à justifier l'énoncé de notre loi, qui, pratiquement, pourra se confondre parfois à peu près avec celle de Belgrand, mais en tout cas la précise utilement. Nous entendons par saturation dans la loi I l'imbibition complète.

Dans des limites restreintes on pourra dès lors représenter N′ par une fonction de la forme

$$N' = a + bH + cH^2,$$

avec

$$b + 2cH > 0, \quad c = \frac{\partial^2 N'}{\partial H^2} > 0,$$

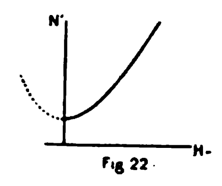


Fig 22

(parabole à axe vertical présentant un minimum pour N′) ou

$$N' = M(H + C)^s, \; M > 0, \; s > 1.$$

Les pertes totales par évaporation pendant le temps T diminuent ici N d'une constante sans influence sur c ou s. On peut aussi supposer l'évaporation E_t au temps t légèrement variable, mais de façon que N′ reste toujours fonction croissante de t, c'est-à-dire de façon qu'à aucun moment l'évaporation ne soit supérieure à δ_t et que l'évaporation totale soit constante.

D'où cette loi :

Loi II. — *Soit un terrain défini comme dans la loi* I *; si l'on verse sur ce terrain pendant un temps fixe* T *où l'évaporation totale est assez faible ou à peu près constante une quantité totale d'eau* H *uniformément répartie dans le temps et l'espace, l'accroissement total* N′ *du niveau de la nappe pendant le temps* T *est une fonction de* H *dont la dérivée seconde est positive et* > 0. *Dans les limites de la pratique on pourra souvent la représenter par*

$$N' = a + bH + cH^2, \; (c > 0),$$

ou

$$N' = M(H + C)^s, \qquad (M > 0, \; s > 1).$$

Or, au début d'une saison froide, aussitôt avant les pluies préparatoires, à moins que la saison chaude précédente, ou, peut-être. la saison froide précédente n'ait été exceptionnellement pluvieuse, on pourra admettre que l'état d'imbibition du sol dans les terrains *perméables* est à peu près le même. Dès lors, à la fin de la saison froide, sauf le cas qui ne se présente à peu près jamais dans la pratique où toutes les pluies tomberaient vers la fin de cette saison, l'accroissement de niveau N' dépendra exclusivement de la hauteur totale H ;

La loi II s'étend donc en général à la hauteur d'eau totale qui profite à la nappe à la suite de la saison froide.

En fait, la surélévation réelle pourra être diminuée par d'autres causes (débit des sources par exemple), mais cette hauteur d'eau totale N qui profite à la nappe (désignée antérieurement, p. 30, par $\Sigma\lambda(\chi)$) est bien d'une des formes

$$a + bH + cH^2$$

ou

$$M(H + C)^s$$

C'est là un point très-important (comp. p. 33 où l'on a vu que l'hypothèse $s > 1$ est nécessaire pour certaines sources de la Vanne).

Pendant la saison froide, les pluies ne sont pas continues : supposons, par exemple que des pluies viennent à amener à peu près la saturation. Le niveau de la nappe pourra ensuite être très-sensible aux pluies subséquentes (il en sera de même d'ailleurs dans les terrains peu perméables, dès que des ruissellements peuvent se produire, pour l'importance de ces ruissellements et le niveau des petites rivières qui en dépendent [1]) et monter assez rapidement.

[1] Voir par exemple notre note sur l'annonce des crues du Gd Morin à l'aide des pluies (*Ann. Soc. Météor.*, 1901, p. 60 et 275) : dès que les niveaux du Gd Morin à Pommeuse sont supérieurs à une certaine cote, ce qui ne peut arriver que quand le terrain est très-imbibé, même superficiellement, de petites pluies peuvent donner des montées assez sérieuses. Voir encore l'étude de M. Voisin sur les crues de la Liane (*Ann. des Ponts et Chaussées*, 1888, 1er sem., p. 464).

Si la forme de la nappe s'y prête suffisamment, on aura alors une croissance très rapide du débit des sources, croissance qui pourra d'ailleurs continuer pour certaines nappes. Des croissances de cette nature se manifestent presque tous les ans au début de l'hiver pour les sources de la Vanne et de la Dhuis (voir tableaux III et XI), et même, dans les années pluvieuses pour des sources ayant un régime tout différent (sources du Havre, année 1897, février, tableau XXI).

Les pluies ultérieures de la saison froide pourront soit faire encore monter le niveau de la nappe, soit maintenir le débit des sources à un chiffre élevé. Supposons une saison froide exceptionnellement pluvieuse : le niveau de la nappe deviendra exceptionnel et atteindra jusqu'en A_3 B_3. On pourra délimiter une région A_1 B_1 A_2 B_2 qui habituellement, ne fait pas partie de la nappe, et qui, à la suite de ces pluies, en fera partie pendant un temps plus ou moins long. Pendant la saison chaude cette surélévation disparaîtra généralement ([1]). Mais la couche spongieuse A_1 B_1 A_2 B_2, qui aura été surimbibée pendant très longtemps et est, généralement très protégée contre l'évaporation

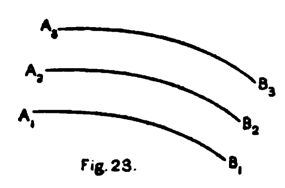


Fig. 23.

mettra (résultats expérimentaux de M. Tollet cités ci-dessus) un temps très long à arriver à un état d'imbibition plus normal, c'est-à-dire à l'état où cette couche est habituellement, et où est la couche supérieure A_2 B_2 A_3 B_3. Il pourra donc arriver que l'année suivante les pluies profitent plus tôt à la nappe et lui profitent en plus grande quantité que ne semblerait devoir l'indiquer le total de pluies de la saison froide correspondante. Une phénomène inverse se sera produit l'année précédente.

Soit alors une formule ou un graphique de prévision des débits minima, par exemple la formule (19), qui exprime le debit mini-

([1]) Dans les cas examinés par exemple Chap. II et III, où l'on admet que le débit de la source est fonction du niveau de la nappe, ceci sera théoriquement sûr pourvu que le débit minimum de la fin de la saison chaude suivante soit sensiblement inférieur au 1er débit non influencé (débit de mai, juin ou juillet) d'au moins une des deux ou trois saisons chaudes antérieures supposées non exceptionnelles au point de vue du débit.

mum q'_0 d'une année en fonction du total H des pluies de la saison froide précédente et du débit minimum q_0 précédent,

$$(1)\ q'_0 = f(H, q_0);$$

on aura l'année suivante

$$(2)\ q''_0 = f(H', q'_0).$$

Nous supposons H exceptionnellement fort, H′ normal.

Si l'on introduisait la quantité H dans la formule théorique, dans la formule (18), p. 32, par exemple, le résultat obtenu pour q'_0 serait peut-être un peu trop fort. Mais nous construisons notre graphique (courbes $q_0 = c^{te}$) d'après les résultats de la pratique : dans la région où q_0 est faible, q'_0 ne sera pas trop fort et nous n'aurons d'autres points H, q'_0 que ceux qui correspondent à des valeurs exceptionnelles de H. Le graphique ne correspondra pas absolument à la formule théorique, mais il nous permettra des prévisions exactes. Au contraire, l'année suivante, à H′, q'_0, q''_0, correspondront, d'après (2), dans le graphique, des points qui nous auront déjà été donnés par des années normales (q_0 n'intervenant plus ici), puisque q'_0, q''_0, H sont normaux. Le graphique nous donnera alors, d'après le raisonnement fait plus haut, un résultat trop faible.

Dono ici :

Théorème. — *Soit un graphique qui relie d'après les résultats de l'expérience, la hauteur des pluies de la saison froide aux débits minima d'une source l'année suivante et l'année précédente : ce graphique pourra parfaitement donner des prévisions trop faibles pour une année quand la saison froide antéprécédente aura présenté un total de pluies exceptionnellement fort, celui de la saison froide précédente étant normal. L'inexactitude de la prévision sera particulièrement accentuée, si le débit minimum antéprécédent était faible.*

Ce résultat présente des vérifications expérimentales remarquables dans notre graphique déjà mentionné (p. 33) et communiqué à l'Académie des Sciences (C. R, Mai 1902). Dans cette communication nous avions annoncé pour la source de Cérilly (Vanne)

en 1902 un débit minimum de 108 à 110 litres : le débit minimum a été de 142 litres, les pluies de la saison froide à Troyes étant de 234 millimètres en 1901-1902, et 346 en 1900-1901, et ce dernier total étant de beaucoup le plus fort depuis 1880 [1]. Une remarque analogue peut être faite pour le débit minimum de la source de Cérilly en 1897.

Cas d'un terrain fissuré, mais non spongieux ou peu spongieux. — 2° *Le terrain a la même constitution, mais les masses* M *ne peuvent absorber qu'une quantité d'eau négligeable.*

Reprenons le raisonnement qui nous a conduit à la loi I : nous voyons ici, que sauf une petite influence des parois des fissures, laquelle pourra être assez sensible si celles-ci sont très nombreuses, mais qui, en tout cas, se fera sentir pendant un temps moins long que l'influence des masses spongieuses du cas précédent, l'accroissement du niveau de la nappe aquifère en un point sera proportionnel à δ et au temps t. Dans le cas des fissures très nombreuses, il suffira de retrancher de la quantité d'eau totale versée pendant un temps θ une constante ou à peu près pour avoir une quantité qui croît proportionnellement à l'accroissement du niveau de la nappe.

D'où cette loi :

Loi III. — *Soit un terrain formé de masses homogènes juxtaposées peu susceptibles d'absorber l'eau et entre lesquelles existent des fissures où l'eau peut circuler. Si l'on verse sur ce terrain une quantité d'eau constante* δ *par seconde uniformément répartie, l'accroissement du niveau de la nappe est une fonction linéaire du temps, sauf peut-être tout à fait au début de l'arrosage.*

Si l'on verse sur ce terrain pendant un même temps T *une quantité d'eau totale* H *uniformément répartie dans le temps et l'espace, l'accroissement du niveau de la nappe est une fonction linéaire de* H.

[1] Nous avions d'ailleurs déjà indiqué que des réserves devaient être faites sur la certitude des prévisions à la suite de circonstances météorologiques exceptionnelles. Comp. *Ann. des Ponts et Chaussées*, 1902, 2me semestre, p. 211 et *Ann. de la Soc. Météor.*, 1903.

Remarque. — Il pourrait être plus exact de ne pas distinguer d'une manière absolue les 2 natures de terrains qui ne diffèrent en fait, dans la pratique, que par le degré de porosité.

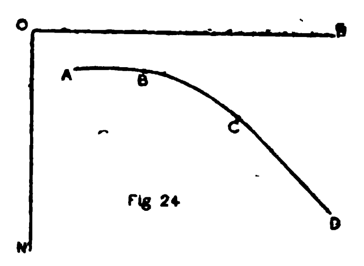
Si l'on verse sur ces terrains, supposés assez desséchés, de l'eau en quantité modérée par unité de temps dans les conditions définies précédemment, 3 périodes se présenteront dans le cas le plus général :

1re Période. — Les parois des fissures et la roche absorbent presque toute l'eau.

2me Période. — L'eau commence à profiter à la nappe où à ce qui en joue le rôle : dans cette période, l'accroissement du niveau de la nappe sera conforme aux lois I et II.

3me Période. — L'imbibition est à peu près terminée : la croissance sera celle de la loi III.

Prenons 2 axes rectangulaires, et portons en abscisses les quantités totales versées en ordonnées les accroissements N du niveau de la nappe : N est alors représenté par une courbe A B C D, où la 1re partie AB est à peu près droite, la 2me BC a la forme parabolique (loi II), la 3me CD est à peu près droite (loi III). Si le terrain est poreux, la partie BC prendra une grande importance dans les limites de la pratique (loi II). Sinon la partie CD prédominera (loi III).



La partie AB sera presque parallèle à OH ; CD au contraire aura par rapport à OH une inclinaison notable, et sera à peu près, parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle NOH.

Ce qui précède paraît d'ailleurs très bien cadrer avec la forme de graphique d'annonce des débits minima de la source de Cérilly (C. R. Mai 1902 ; comp. p. 33 précédente).

CHAPITRE IX

—

SUR LA PRÉVISION DES TARISSEMENTS DES SOURCES DE LA SOMME A L'AIDE DES HAUTEURS DE PLUIE. (1)

Dans une note antérieure nous avons cherché à montrer qu'il était possible d'établir, en se basant sur la loi de Dausse, des prévisions quantitatives pour le débit moyen mensuel minimum de deux des principales sources de la Vanne.

Nous nous proposons d'examiner : 1°, dans ce chapitre, si des prévisions plus ou moins semblables ne peuvent être établies pour la détermination des dates des tarissements de la rivière de la Somme (à Sommesous, Marne), dont le service hydrométrique, dit quelques mots dans son résumé annuel d'observations (*Ann. Soc. Météor.*). 2°, dans les 2 chapitres suivants, si des prévisions plus ou moins semblables peuvent être établies pour les dates d'un débit moyen mensuel donné ou plus généralement des débits des deux mêmes sources de la Vanne.

La petite rivière de la Somme, affluent de la Marne, sort à Sommesous, entre Châlons-sur-Marne et Arcis-sur-Aube, de la

(1) Les 2 chapitres qui suivent peuvent être considérés comme la suite de la note que nous avons publiée sur la prévision des débits minima des sources de la Vanne (loc. cit.). Ils ont été en partie rédigés avant toutes les théories précédentes, et nous y ont conduit. Les chiffres qui s'y trouvent ont été la plupart pris dans les *Résumés des observations* centralisées par le service hydrométrique du bassin de la Seine, l'*Atlas corrélatif* et ces observations. Nous avons su profiter des remarques faites chaque année dans ce résumé par les Ingénieurs du service à propos des tarissements, des sources et de la sécheresse ou de l'humidité des saisons chaudes ou froides. Ces résumés constituent la base de la partie pratique de notre mémoire. Nous croyons qu'ils renferment le fondement et le germe de bien d'autres recherches.

craie blanche à un niveau plus ou moins élevé suivant le degré d'imbibition des terrains environnants. Tous les ans le service hydrométrique fait observer, avec le concours du service ordinaire (Ponts et Chaussées) du département de la Marne les dates de tarissements de la source supérieure située à quelques mètres d'un chemin rural. Le tableau I ci-joint [1] indique sommairement les résultats de ces observations dont on trouvera le détail dans la brochure annuelle publiée par le service hydrométrique (1886-1900) [2].

Le tarissement se produit généralement dans le 2[me] semestre de chaque année : la rivière disparaît souvent sur une longueur plus ou moins grande à partir de son point d'émergence habituel. Les sources réapparaissent lors des pluies préparatoires de la fin de l'année.

GRAPHIQUE. — Nous avons alors construit un graphique 1, en admettant que, sous certaines conditions, la date δ du tarissement pouvait être une fonction des chiffres des pluies θ, θ' des deux saisons froides précédentes :

$$\delta = \psi(\theta, \theta')$$

Dans le cas où le tarissement ne s'est pas produit, nous avons pris pour la date δ correspondante, faute de renseignement plus précis, celle du 1[er] janvier ; on doit en effet observer que, presque toujours, les pluies préparatoires qui, dans le bassin de la Seine, occasionnent les premières montées sur les cours d'eau, font réapparaître la rivière à sa source. Nous avons porté en abscisses les θ (saison froide précédente), en ordonnées les dates :

Ce graphique nous a alors montré les circonstances suivantes [3] qui nous paraissent *très curieuses*, la moyenne des pluies de la

(1) Tous les tableaux numériques et les graphiques ont été réunis à la fin du volume.

(2) La plus grande partie de cette brochure annuelle paraît aussi dans l'*Annuaire de la Soc. Météor. de France*. Il est bien regrettable que la publication officielle de cette brochure et de l'atlas qui l'accompagne ait due être suspendue par mesure d'économie. La brochure est maintenant autographiée et une partie en est encore publiée jusqu'à nouvel ordre dans l'Ann. précité. Provisoirement un tirage de l'Atlas a pu être fait au moins pour 1901 et 1902 avec le concours pécuniaire de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des Sc.

(3) Sous réserve de l'examen des résultats d'un plus grand nombre d'années. Ce qui suit montre le grand intérêt qu'il y a à continuer les observations des tarissements de la Somme.

saison froide à Sommesous dans la période 1887-1902 étant de 319 millimètres (311 millimètres de 1880 à 1902).

1° Quand le total des pluies de la saison froide atteint au moins 370 millimètres, la source ne tarit pas avant le 1er décembre.

2° Pour l'année qui suit une année très pluvieuse (1888 à 1891, 1897 à 1898), ou une série d'années pluvieuses, la date du tarissement dépendra exclusivement du total de pluies de la saison froide suivant une loi que, *provisoirement*, on peut regarder comme linéaire (droite du graphique).

3° Dans une période de saisons froides plutôt sèches, dont aucune ne dépasse sensiblement la moyenne (1892 à 1896), la date du tarissement varie fort peu (de la fin de juin au commencement d'août).

Il semble que le régime des sources de la Somme présente certaines analogies avec celui des sources de la Vanne (Cérilly, voir p. 150) : l'influence d'une année très pluvieuse se fait nettement sentir l'année suivante et même pendant deux ans.

C'est croyons-nous, à peu près tout ce qu'on peut dire pour le moment ; c'est déjà beaucoup, car *ceci permettra de faire dès le 1er Mai sur la date du tarissement annuel des sources de la Somme une prévision réalisée assez souvent* (dans les cas 1° et 3° principalement).

CHAPITRE X

SUR LA PRÉVISION DES DÉBITS DE LA SOURCE DE CÉRILLY (VANNE)

Graphiques basés sur des lois météorologiques. — Nous venons de voir que l'on pouvait souvent prévoir les dates des tarissements de la source supérieure de la Somme à Sommesous à l'aide des hauteurs de pluies des deux saisons froides précédentes. Si l'on admet que le tarissement se produit au moment où le niveau de la nappe souterraine en un point s'abaisse au-dessous d'une certaine hauteur, c'est-à-dire si l'on admet que le débit d'une source en un point est fonction de la hauteur de la nappe en un point, au moins quand les pluies ne lui profitent plus guère (1), on voit que nous avons obtenu un graphique de prévisions des dates où une hauteur déterminée est réalisée, c'est-à-dire pour une autre source pérenne qui s'alimenterait à la même nappe (supposée assez vaste), un moyen de reconnaître à quelle date se produira pour cette dernière source un débit déterminé D. Ceci est parfaitement d'accord avec les résultats précédents : dans les périodes d'années sèches, le débit pourra se maintenir au-dessus de D tant que les pluies profitent à la nappe, et la date du tarissement coïncidera toujours, un certain retard étant dû à la nature des choses, avec l'arrivée de la saison chaude. La théorie développée antérieurement et l'hypothèse ci-dessus expliquent donc complètement le régime des tarissements de la Somme.

Il était dès lors naturel de chercher, comme vérification de ces idées, si un moyen semblable n'était pas utilisable pour la source de Cérilly (Vanne).

(1) Comp. chap. IV.

Nous avons (¹) d'abord formé le tableau II pour la source de Cérilly, tableau où les années sont rangées depuis 1884 d'après les totaux de pluies croissants des saisons froides précédentes à Troyes.

Nous pouvons alors admettre que la première date δ_q à laquelle se produit un débit donné q après le maximum du débit, qui a lieu généralement (tableau IV) dans le 1ᵉʳ semestre de chaque année, est une fonction soit du débit minimum précédent D et des pluies P_1 de la saison froide précédente, c'est-à-dire dépend de P_1 et de l'état de la nappe souterraine à la fin de l'hiver précédent, soit des pluies P_1, P_2 des deux saisons froides précédentes. On aura ainsi

$$\text{(I)} \qquad \delta_q = \varphi(P_1, D),$$

ou

$$\text{(II)} \qquad \delta_q = \psi(P_1, P_2).$$

1° Loi I. — Nous considérons (graph. 2) d'abord deux axes rectangulaires OP_1 et OD, nous portons pour chaque année la valeur de P_1 en abscisse, de D en ordonnée, et nous inscrivons à côté du point obtenu la date δ_q exprimée comme dans le tableau II par le numéro du mois où q a été réalisé (approximativement). Ceci nous permettra de tracer les courbes $\delta_q = C^{te}$.

En réalité, ici nous pourrions inscrire à côté de chaque point les dates où les débits 180ˡ, 160ˡ, 140ˡ, 120ˡ, 100ˡ et 80ˡ ont été réalisés : nous nous bornons à inscrire les dates correspondant aux débits 160, 140, et 120. Quand la date manque dans le tableau, nous la remplaçons par la lettre x.

On vérifie directement sur le graphique que les dates où le débit* 160 *litres a été réalisé se distribuent d'une façon suffisamment régulière sur les courbes qui y sont tracées.

(¹) Nous ne croyons pas inutile, pour la clarté de ce qui suit, de donner ici le tableau (tableau III) des débits moyens mensuels en litres par seconde de la source de Cérilly, et les pluies mensuelles à Villeneuve l'Archevêque (à quelques kms de la source). Ces totaux de pluies sont extraits de l'intéressante étude de M. J. Jaubert, « Le régime pluviométrique du bassin de la Vanne », parue dans les *Annales de l'Observatoire municipal de Montsouris* (1901, t. II, p. 186). Les pluies à Villeneuve l'Archevêque peuvent donner lieu à un travail analogue à celui que nous avons fait (*Ann. des Ponts et Chaussées*, 1902, loc. cit., par exemple) pour Sens et Troyes. Nous croyons inutile d'insister.

Il n'y a d'anomalies sérieuses que pour les années 1897 et 1902 : ces anomalies ont été expliquées page 142.

D'ailleurs on pourra contrôler les résultats de la prévision à l'aide du second graphique (loi II) dont nous allons indiquer la construction tout à l'heure.

Pour passer de la prévision du débit 160 litres aux autres débits, on peut se servir du même graphique ou encore étudier la décroissance annuelle des débits, à la suite du maximum du 1er semestre, entre le moment où le débit 180 est réalisé et le minimum. Nous formons pour cela le tableau suivant qui donne dans cet intervalle les décroissances mensuelles (tableau V). Un examen sommaire montre que l'on pourra approximativement fixer la décroissance mensuelle à 20 litres par mois pour le débit 180 litres et à 15 litres au plus pour les débits $\leqslant$ 160 litres [1]. On contrôlera aussi les résultats à l'aide de notre graphique antérieur (C. R., Mai 1902) sur la prévision des débits minima. S'il y a trop de désaccord, on pourra admettre que le débit minimum a lieu en novembre et, dans l'intervalle, entre δ_{160} et novembre prévoir la marche du débit par interpolation.

2° Loi II. — Nous considérons (graph. 3) deux axes rectangulaires OP_1, OP_2, et nous portons pour chaque année la valeur de P_1 en abscisse, celle de P_2 en ordonnée, en inscrivant à côté du point obtenu la date δ_q et les autres dates analogues comme pour le graphique de la loi I. Nous traçons ensuite les courbes $\delta_q = c^{te}$.

Ici nous avons un peu plus d'anomalies que dans la loi I. On retrouve l'influence, déjà signalée pour Sommesous, des périodes humides, en classant dans un tableau VI ci-après les hauteurs de pluie par ordre chronologique. De 1885 à 1889 les totaux des saisons froides sont voisins de la moyenne pour deux années, sensiblement au-dessus pour trois, et les débits minima de ces cinq années sont forts. L'influence de cette période humide subsiste encore en 1890 et 1891, où la source est très sensible aux pluies de la saison chaude de 1890 et surtout de 1891 ; cela se conçoit bien : toute la partie du terrain de la nappe qui est restée exceptionnellement imbibée pendant cinq ans n'est pas susceptible d'absorber par imbibition les eaux des pluies de la saison chaude,

(1) On peut encore se servir des moyennes du tableau VII.

et celles-ci ont une action. De 1890 à 1895, période sèche : les débits minima s'abaissent de plus en plus, et alors le graphique est beaucoup plus précis de 1892 à 1896 au moins. Les années 1896 et 1897 sont humides : cela suffit pour rendre le graphique incertain en 1899, la source étant alors très sensible aux pluies de la saison chaude. 1901 présente malgré tout une anomalie : la saison froide 1900-1901 est de beaucoup la plus pluvieuse depuis vingt ans, et les pluies les plus importantes ont lieu en mars-avril ; on sait qu'en avril les pluies profitent un peu moins aux sources profondes (1).

Provisoirement nous pouvons conclure que le débit minimum ou la date d'un débit déterminé doivent dépendre en général pour la source de Cérilly des pluies des saisons froides de plus de deux ans. Nous avons vu que le débit minimum dépend, en général, des pluies de la saison froide précédente et du débit minimum précédent. Ce dernier tient donc bien compte de l'influence des saisons froides antérieures (2). Notre graphique pour Cérilly déjà publié (C. R., Mai 1902), et celui de la loi I, doivent dès lors être supérieurs à celui de la loi II, comme ils le sont en réalité.

Remarque. — Il y a pour les débits des sources de la Vanne certains phénomènes assez réguliers, d'ailleurs bien connus des Ingénieurs, qui valent la peine d'être mentionnés ici : formons pour chaque année et par mois de la saison chaude un tableau VII indiquant la baisse du débit de Cérilly depuis le mois précédent.

On voit sur ce tableau que pendant les mois de juillet, août, septembre, octobre le débit va presque toujours en baissant, et que la baisse est assez régulière. Il en est de même encore suffisamment en mai et juin. Les grosses irrégularités d'une année à l'autre se produisent au moment où la croissance des moyennes pour chaque mois change de sens, c'est-à dire en avril et novembre.

(1) Voir par exemple nos notes sur les crues du Grand Morin, *Annu. Soc. Météor.*, 1901, p. 60 et 275, et de la Marne à Chaumont, *Assoc. franç. pour l'avanc. des Sc.*, Ajaccio, 1901.

(2) Comparez à la théorie de la p. 129 et à la loi II qu'on en déduit. On remarquera que les années 1897 et 1902 sont bien placées sur le graphique de la loi II, alors qu'elles le sont mal sur celui de la loi I. Ceci est tout à fait d'accord avec la théorie de la p. 142.

Il en résulte encore que, en général, à partir de mai, juin ou juillet le débit va toujours en décroissant pendant plusieurs mois. On peut admettre que, dans cette période, les pluies profitent peu à la nappe, dès que la décroissance est bien nette ; cette dernière est alors un phénomène mécanique qui relève, semble-t-il, d'une théorie développée dans la première partie de ce mémoire (chap. II et III).

Nous allons voir, en effet, qu'on peut arriver pour la source de Cérilly à un graphique donnant des prévisions bien plus précises conformément à cette théorie. Ces prévisions ne sont plus alors basées que sur des considérations mécaniques et sur ce fait que pendant une bonne partie de la saison chaude les pluies ne profitent pas aux sources profondes. Nous avons insisté sur les graphiques précédents parce qu'ils font au contraire intervenir davantage les considérations météorologiques. Cela les rend moins précis dans la pratique ; mais les résultats sont encore assez approchés pour montrer la régularité habituelle de certaines lois météorologiques dans le bassin de la Seine, et faire voir combien les phénomènes relatifs au débit de certaines sources profondes sont intimement liés aux hauteurs de pluie de la saison froide. Ces graphiques sont donc importants au point de vue météorologique. Leur existence, pour une source possédant en même temps un graphique comme celui dont nous allons nous occuper dans le chapitre suivant, suffira à établir avec une grande précision la loi de Dausse, par exemple en ce qui concerne les terrains dont dépend cette source.

Nous renvoyons l'étude de la source « d'Armentières et Drains » [1] à la fin du chapitre suivant.

[1] Belgrand. — *La Seine, études hydrologiques*, p. 164 ; *Eaux nouvelles*, Paris, 1882, p. 165.

CHAPITRE XI

—

PRÉVISION DES BAS DÉBITS DES SOURCES DE LA VANNE (*Suite*)

Graphiques basés sur des lois météorologiques et mécaniques. — Les théories de la première partie, en particulier celles des chapitres II, III et IV laissent entrevoir la possibilité d'établir un ou des graphiques de prévision des débits des sources dans les périodes où les pluies ne profitent pas à la nappe.

Considérons exclusivement de pareilles périodes, et admettons que si Q_0 est le débit d'une source à un instant quelconque d'une pareille période, le débit Q_1, un temps t après, est de la forme [1],

$$(3) \qquad Q_1 = f(Q_0, t).$$

D'après la loi de Dausse, cela semble pouvoir parfois s'appliquer dans les terrains perméables du bassin de la Seine où les pluies de la saison chaude profitent peu aux sources profondes. Ce que nous avons dit tout à l'heure sur la décroissance des débits de la source de Cérilly dans cette saison montre d'ailleurs que cette source a un régime qui ressemble à celui que nous avons supposé dans la rédaction des chapitres II et III [2]. Cherchons donc une application à la source de Cérilly (Vanne), en prenant comme bases du graphique le tableau précité III des débits moyens mensuels de cette source depuis 1881 [3].

(1) C'est un résultat auquel nous a conduit avec une forme plus précise la théorie développée dans les chapitres II et III (formule (6)).

(2) Le régime est « non influencé » (page 13).

(3) Ce sont effectivement les résultats mentionnés pages 37-45 et la formule (6) qui nous ont conduit à l'idée de cette application. Ici la théorie a précédé la pratique.

Nous construirons pour la relation (3) les courbes $t = c^{te}$ en prenant par exemple $t = 1, 2, 3, \ldots$ mois. Nous classons dans un tableau VIII les débits par mois, en mettant dans la première colonne l'année, dans la seconde le dernier des maxima (ou les plus forts débits) constatés en mai, juin ou juillet, et dans les autres les débits du premier, deuxième, troisième, ... mois suivant. Dans la deuxième colonne les débits sont rangés par ordre décroissant; le chiffre entre parenthèses indique le numéro du mois correspondant.

Ce tableau peut tel quel servir aux annonces; mais on peut en tirer un graphique plus précis, formé des courbes $t = c^{te}$, graphique qui donne des vérifications expérimentales curieuses de nos théories antérieures et de celles de M. Boussinesq (C. R., 22 juin-juillet 1903).

Prenons deux axes rectangulaires OQ_0, OQ_1; choisissons pour Q_0 le débit de la deuxième colonne, pour Q_1 successivement les débits des troisième, quatrième, ... colonnes, en inscrivant à côté de chaque point les valeurs de t correspondantes en mois (1, 2, 3,..).

On voit de suite que tous les points portant le même chiffre se groupent très sensiblement sur des droites qui passent toutes par l'origine conformément à la formule (12), p. 20. Certaines années, 1897 (débit initial 273), 1893 (débit initial 227), 1899 (débit initial 173) présentent de petits écarts, qui, d'ailleurs, s'atténuent quand t augmente, et que l'on peut corriger en prenant comme débit initial Q_0 le débit de la troisième colonne. L'année 1890 a ici un caractère exceptionnel : les débits sont tous plus forts que ne l'indique le graphique [1]. 1890 a été précédé d'une période de cinq années pluvieuses avec des bas débits élevés ; le débit maximum de 1889 (302 litres) est le plus fort depuis vingt ans après celui de 1886 (308 litres); le débit minimum de 1889 (175 litres) est le plus fort depuis vingt ans. 1890 est d'ailleurs l'année pré-

[1] Il semble que, quelquefois, dans des circonstances exceptionnelles, il puisse arriver un peu pour la source de Cérilly ce qui arrive nettement pour les sources du Hâvre, où cela peut durer trois ans (voir Meurdra, loc. cit., et le tableau XXI, plus loin) ; la crue correspondante de la nappe agit encore d'une manière sensible dans le deuxième semestre de l'année suivante (années 1881-1882 et 1889-1890 où ceci se manifeste, les saisons froides 1881-1882 et 1889-1890 ayant des totaux de pluies très faibles, 117 et 160 millimètres respectivement). Comp. page 93-94.

cédée de la saison froide la plus sèche depuis vingt ans. Une partie de la nappe qui, habituellement se dessèche plus ou moins chaque année pendant les mois de bas débits, subsistait depuis cinq ans : elle a pu en 1890 maintenir des débits supérieurs à ce qu'ils devaient être. L'année 1890 est une année de transition entre une période humide et une période sèche.

Les droites $t = c^{te}$ jouissent bien d'ailleurs des propriétés indiquées pages 19 et 43 : plus t est grand, et plus l'angle des droites t, $t + 1$ est petit.

Nous obtenons ainsi non seulement un graphique exact sauf à la suite d'une période de plusieurs années pluvieuses (encore en 1890 aurait-il donné une certaine approximation), mais aussi une vérification expérimentale des théories précitées avec une rigueur que nous n'avions pas osé espérer.

On pourra dès lors dès le commencement du mois de juin faire une prévision sur la marche du débit du deuxième semestre en prenant pour Q_0 le débit de mai. Si le débit de juin est plus fort que ne l'indique le graphique, on corrigera la prévision en prenant ce débit pour Q_0, etc. La date des pluies préparatoires et des premières montées sur les cours d'eau marquera à peu près la date où le débit de la source de Cérilly doit croître et où les prévisions cessent de s'appliquer.

Ce nouveau graphique aurait donné en 1902 (tableau III) pour le débit réalisé en novembre une prévision sensiblement exacte (1). Il permet d'ailleurs à peu près de prévoir les débits minima, à condition d'admettre que ceux-ci ont lieu à peu près en novembre ou décembre, conformément à ce que montre le tableau VI (2).

(1) Il tend à montrer que en 1902, les pluies d'avril et mai, qui ont déterminé le maximum de juin, ont pu augmenter un peu le débit de novembre.

(2) Comme vérification expérimentale suffisante d'une théorie antérieure (pages 55-56) il nous a paru utile de montrer par un tableau (tableau VIII bis) et un graphique 5 ci-après que le débit moyen dans le premier semestre (1er janvier-1er juillet) pour Cérilly était bien une fonction de la hauteur des pluies à Troyes pendant la saison froide (1er novembre-1er mai) et du débit minimum précédent. Nous laissons de côté le premier semestre de 1897, précédé du débit minimum 89 litres, qui, comme nous l'avons déjà remarqué plusieurs fois (page 144, par exemple) ne correspondait pas à l'état réel de la nappe.

Sources d'Armentières et Drains. — L'étude de cette source se fait de la même manière que celle de Cérilly qui est voisine : elle a un régime très analogue. Les minima ont lieu à très peu près aux mêmes dates, comme on le voit sur le tableau IX ci-après des débits moyens mensuels (en litres par seconde) de cette source. Il en est de même des maxima, ou, plus exactement, à tout maximum de Cérilly correspond pour Armentières un chiffre voisin du maximum. Il semble que cette deuxième source (années 1887, 1891, 1896) vérifie encore mieux que la première cette propriété des nappes à crues brusques [1] d'avoir souvent leur débit maximum ou un débit assez voisin du maximum dès qu'on a les premières pluies sérieuses de l'hiver profitant à la nappe et amenant des montées sur les cours d'eau, les pluies ultérieures ne faisant guère que soutenir le débit.

C'est déjà une légère différence entre les régimes des deux sources ; il y en a d'autres.

On peut chercher à établir pour la deuxième source une correspondance des débits avec ceux de la première, comme nous l'avons fait déjà pour les débits minima (C. R. Mai 1902 par exemple). Formons un tableau IXbis indiquant les dates où chaque année le débit a été à Cérilly voisin de 160 litres à partir de mai jusqu'aux pluies préparatoires de la saison froide, dans la période de décroissance, ainsi que ces débits et les débits correspondants pour la deuxième source.

Ce tableau montre qu'au débit 160 litres de Cérilly correspondra souvent à peu près le débit 400 litres pour Armentières. C'est le débit que donnerait la formule

$$y_{Ar} = 1{,}52\, x_{Cé} + 158^{l}{,}8$$

que nous avons indiquée pour les débits minima. (C. R., mai 1902 ; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1902).

On remarquera toutefois que, la plupart du temps, quand le débit 160 litres a lieu de bonne heure vers mai, juin, juillet, c'est-à-dire dans les années sèches, le débit correspondant de la deuxième source est plus fort (1892, 1893, 1898). Il semble, par conséquent, que la décroissance du débit soit relativement moins

[1] Page 84.

rapide pour la deuxième source que pour la première : la deuxième nappe, doit-être, et paraît effectivement, d'après son débit, plus puissante que la première. La deuxième source est d'ailleurs un peu plus basse (111 mètres d'alt. au lieu de 136 pour Cérilly).

On peut dès lors se demander, d'après nos théories antérieures [1] si le graphique des formules (3) page 154 pour Armentières ne devra pas présenter des caractères plus voisins de ceux de la première série des courbes

$$\frac{1}{\sqrt{Q_1}} = \frac{1}{\sqrt{Q_0}} + C$$

(pages 25, 40) que de ceux de la deuxième série,

$$Q_1 = CQ_0$$

(pages 20, 43), au contraire de ce qui se présente pour Cérilly. Les courbes (7) page 15 ou (3) page 154 seraient alors, d'après ces théorèmes, convexes vers les Q_1 positifs. Le graphique 6 ci-après, appliquable à Armentières et Drains [2], montre qu'il en est

[1] Pages 20, 25, 37-45.

[2] M. Boussinesq a insisté à plusieurs reprises pour que nous formions l'équation de la courbe des débits (p. 21 et formule (6bis) p. 23) pour les sources de Cérilly et Armentières, c'est-à-dire d'après ce qui précède, que nous calculions, pour Cérilly, le coëfficient α dans la formule $Q = q_0 e^{-\alpha t}$ (p. 20, q_0 débit au temps $t = 0$), et, pour Armentières, le coëfficient α dans la formule $Q = \frac{q_0}{(1 + \alpha t)^2}$ (p. 25). Voici alors ce que nous avons fait : Exprimons Q, q_0 en litres, t en mois.

1° *Cérilly*. — $\text{Log. } q_0 - \text{log. } Q = \alpha t$.

Une fois le graphique (7) tracé par tâtonnements de façon que les propriétés géométriques des courbes soient conformes aux pages 15-17, ce qui est possible, on prend $q_0 = 300$ litres (valeur maxima de Q dans le tableau VIII). Le graphique donne les valeurs de Q pour $t = 1, 2, 3,...$ Les diverses valeurs de α diffèrent peu : leur moyenne est 0,1066, et $Q = 300\, e^{-0{,}1066\, t}$. Le graphique a pour équation $\text{log. } q_0 - \text{log. } Q = 0{,}1066\, t$.

2° *Armentières*. — $\frac{1}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{q_0}} = \frac{\alpha t}{\sqrt{q_0}}$. Une fois le graphique (7) tracé comme ci-dessus, on prend $q_0 = 900$, $Q = \frac{900}{(1 + \alpha t)^2}$. En tenant compte des propriétés de (7) (p. 15-17), le graphique donne Q pour $t = 1, 2, 3...$, d'où l'on déduit diverses valeurs de α variant de 0,085 à 0,06 ou 0,055. M. Boussinesq appela alors notre attention sur la relation $y_{Ar} = 1{,}52\, x + 158^l{,}8$ indi-

bien ainsi, et constitue, croyons-nous, une nouvelle vérification *bien remarquable* de la théorie. Il a pour base le tableau X ci-après analogue au tableau VIII.

quée tout à l'heure (p. 157), et le rôle particulier que pouvait jouer la constante $158^l,8$. D'autre part nous remarquâmes que les courbes de notre graphique semblaient converger vers un point voisin du point ayant pour abscisse et pour ordonnée 200 litres, plus généralement une certaine constante C à déterminer. Ceci revenait à remplacer les deux équations précédentes par

$$\frac{1}{\sqrt{Q - C}} - \frac{1}{\sqrt{q_o - C}} = \frac{\alpha t}{\sqrt{q_o - C}},$$

$Q - C = \frac{q_o - C}{(1 + \alpha t)^2} = \frac{900 - C}{(1 + \alpha t)^2}$; après essai de la valeur de $C = 200$, assez satisfaisante ($\alpha = 0,148$), nous fûmes conduit à prendre $C = 158^l,8$, $\alpha = 0,120$, en moyenne, les diverses valeurs de α différant peu,

$$Q = 158^l,8 + \frac{740}{(1 + 0,120t)^2};$$

le graphique a pour équation

$$\frac{1}{\sqrt{Q - C}} - \frac{1}{\sqrt{Q_0 - C}} = \frac{\alpha}{\sqrt{q_o - C}}(t - t_o) = 0,00441\,(t - t_o).$$

Les deux équations ci-dessus représentent les graphiques corrélatifs avec une grande approximation.

(Octobre-novembre 1903).

CHAPITRE XII

—

APPLICATION AUX SOURCES DE LA DHUIS

Les sources de la Dhuis, petit affluent du Surmelin qui se jette dans la Marne un peu à l'amont de Château-Thierry, ont été captées par la ville de Paris. Elles sont voisines de Montmirail (Marne), et comprennent dans leur bassin des terrains analogues à ceux de la vallée du Grand-Morin, terrains que Belgrand a classés comme semiperméables [1]. On trouvera une description géologique et hydrologique du bassin d'alimentation des sources de la Dhuis dans une note de M. Le Couppey de la Forest [2].

Le terrain présente une succession de couches perméables ou imperméables, en particulier, à la surface, un limon reposant sur les calcaires et meulières de Brie. La couche la plus importante, puissante de 20 à 25 mètres, est formée du travertin de Champigny, calcaire fissuré présentant parfois des cavernes et des conduits souterrains. Ce travertin repose sur des marnes imperméables déterminant un niveau d'eau d'où sort la Dhuis à l'altitude 141 mètres : il constitue le fond de toutes les vallées et la plus grande partie des pentes : Sur le haut des plateaux, au contraire (cote 220 mètres environ) prédomine le limon précité.

Depuis 1885, les sources de la Dhuis (voir tableau XI ci-après, que nous devons à l'obligeante communication du service des eaux de la ville de Paris) présentent un régime tout-à-fait analogue à celui de la source de Cérilly. Le débit minimum se pro-

[1] *La Seine, études hydrologiques*, p. 199 et suiv. ; *Eaux nouvelles*, Paris, 1882, p. 100.

[2] *Annales de l'Observatoire de Montsouris* 1901, p. 259 ; dans cette note se trouvent rapportées d'intéressantes expériences sur les « bétoires » de la Dhuis ; une carte de la région y est annexée.

duit généralement vers la fin du deuxième semestre de chaque année ; il varie peu : de 219 litres (1886) à 173 litres (1898). A la suite des pluies préparatoires du début de la saison froide, un accroissement sérieux et assez rapide du débit se produit. Le maximum a lieu dans le 1er semestre, généralement dans les 5 premiers mois, et varie entre 294 litres (1886 et 1897) et 222 litres (1902). Ensuite la diminution du débit se fait lentement.

Ceci suffit à faire penser que la loi de Dausse est applicable au terrain de la Dhuis : *les pluies d'été profitent fort peu à la nappe de la Dhuis ou à ce qui en joue le rôle.* Le débit doit donc dépendre seulement, ou à peu près, des pluies de l'hiver. Nous allons essayer de le vérifier.

Pour cela nous utiliserons les observations pluviométriques de la station voisine de Montmort (altitude 198 mètres). Nous portons dans un tableau XII ci-après les hauteurs de pluies H_1 des saisons froides précédant le 2me semestre de chaque année, et, vis-à-vis, les hauteurs H_2 de pluies de la saison froide antéprécédente, et les dates D (en mois) où le débit 220 litres a été réalisé. Nous admettons une relation de la forme.

$$D = \varphi\,(H_1, H_2),$$

et nous cherchons à construire les courbes $D = c^{te}$ (graph. 7).

Si l'on a soin de marquer la date pour les points correspondants à 1900, 1901, 1902, et si l'on néglige ces points, on observe de suite que la date est une fonction croissante de H_1 et de H_2. Ceci paraît donc une vérification de la loi de Dausse et de nos théories antérieures.

Il semble que, depuis 1900, les dates où le débit 220 litres est réalisé soient avancées, comme si, depuis, le débit avait été réduit. Or nous trouvons précisément dans la note précitée de M. Le Couppey de la Forest (p. 263) que, vers cette époque, le service des eaux a fait maçonner le ravin de la Dhuis sur un kilomètre à l'amont de la source pour diminuer le trouble des eaux lors des crues : les travaux ont réussi effectivement. Mais il pouvait évidemment en résulter une petite diminution du débit (1).

(1) D'après notre graphique et sous réserve des observations ultérieures, cette réduction R semblerait pouvoir être appréciée vers août à 25 litres Mais on remarquera que les dernières saisons chaudes à Montmort sont toutes au-

Pour l'année 1891, la date du débit 220 litres paraît avoir été retardée par les très fortes pluies de mai et juin (132 et 93 mm.).

Il est encore intéressant de chercher à construire pour la Dhuis un graphique analogue à celui que nous avons construit pour la source de Cérilly (p. 155 et graph. 4) d'après la relation (3) p. 154. Ceci peut en effet nous conduire à une nouvelle vérification des théories antérieures.

Nous formerons donc, comme pour la source de Cérilly un tableau XIII analogue au tableau VIII et le graphique 8 des courbes $t =$ c^{te}. Pour plus de clarté, nous poserons seulement $t = 1$, 3 ou 5. On voit sans peine que l'on peut mener des droites passant par l'origine et par les positions des points $t = 1$, $t = 3$, $t = 5$ de façon que l'erreur sur le débit Q_1 ne dépasse pas une dizaine de litres. C'est surtout pour $t = 1$ que la construction paraît exacte.

Toutefois, eu égard à la lenteur de la décroissance des débits pour les sources de la Dhuis, certaines réserves doivent peut-être être faites à cause des écarts que présentent par rapport à la droite $t = 5$ les points correspondants. On peut, croyons-nous dire seulement ici que la vérification est assez satisfaisante [1].

En résumé :

On peut construire pour la Dhuis un graphique de prévision des débits pour connaître d'avance leur décroissance après le dernier maximum du premier semestre jusque vers le mois de novembre. Ce graphique vérifie suffisamment les théories des chapitres II *à* IV, *comme celui de la source de Cérilly (Vanne).*

L'importance de ce fait est d'ailleurs, jusqu'à nouvel ordre, croyons-nous, plutôt théorique que pratique pour la Dhuis.

dessous de la moyenne, ce qui a pu aggraver sensiblement la diminution du débit. Ce chiffre est en tout cas un maximum de R. L'avenir montrera sans doute si R est réellement appréciable ou non.

[1] On remarquera que ce graphique, où l'on prolonge les droites $t = 1$, 3, 5, donne avec assez d'approximation la variation du débit à partir du moment où le dernier maximum a été réalisé dans le 1er semestre, même si celui-ci a eu lieu avant mai.

CHAPITRE XIII

—

SUR LA PRÉVISION DES BAS NIVEAUX DE LA MARNE A LA CHAUSSÉE

(*entre Vitry et Châlons*)

Il semble résulter suffisamment de nos études précédentes sur la relation qui existe entre les pluies des saisons froides dans les terrains perméables et même dans les terrains semi-perméables entre Château-Thierry et Troyes pour le bassin de la Seine, d'une part, et les bas débits des sources dans cette région d'autre part, que les bas débits de ces dernières pendant le deuxième semestre d'une année sont surtout fonctions des pluies des deux saisons froides précédentes au moins, les pluies de la saison chaude ne pouvant guère influer qu'exceptionnellement.

Considérons maintenant une rivière à bords perméables, comme l'est la Marne à peu près depuis Chaumont jusqu'à Epernay, sauf pour une petite partie de son parcours, vers Saint-Dizier [1].

Dans les bas débits, c'est-à-dire généralement dans la saison chaude, la rivière sera alimentée à la fois par ses sources et celles de ses petits affluents à l'amont, et influencée par le niveau et le degré de saturation de la nappe où elle coule. Cette nappe sera plus ou moins riche suivant le régime qu'elle a subi pendant les saisons froides précédentes, c'est-à-dire pendant les hautes eaux; mais la période des eaux ordinaires ou des basses eaux est beaucoup plus longue. On conçoit dès lors que la période des basses

[1] Nous renvoyons ici comme au besoin pour ce qui précède aux cartes de l'*Atlas annuel* du service hydrométrique central du bassin de la Seine ou du *Manuel hydrologique* de ce bassin, Paris, 1884.

eaux précédentes ait une influence profonde sur le degré d'imbibition des terres ; par suite la richesse de la nappe sera fonction à la fois du niveau moyen N_p des basses eaux de la période précédente et des autres éléments dépendant tous surtout en général des pluies $P_1, P_2, \ldots$ des saisons froides précédentes, éventuellement des pluies $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ des saisons chaudes précédentes. Les bas niveaux d'une rivière à bords perméables à une certaine distance de ses sources dépendront ainsi surtout de $N_p, P_1, P_2, \ldots, \varpi_1, \varpi_2, \ldots$ La moyenne N_a des bas niveaux d'une saison chaude, ou un certain nombre de quantités liées à ces bas niveaux seront fonctions

$$(4) \qquad N_a = \varphi(N_p, P_1, P_2, \ldots, \varpi_1, \varpi_2, \ldots).$$

Mais N_p sera lui-même une fonction du niveau analogue antéprécédent N_{p_2} et des pluies $P_2, \ldots, \varpi_2, \ldots$ correspondantes ; et ainsi de suite.

Si l'on admet ce postulat, conforme d'ailleurs à des lois connues de la météorologie, à savoir que les influences des faits météorologiques s'atténuent de plus en plus avec le temps [1], on aura finalement

$$(5) \qquad N_a = \varphi_1(P_1, P_2, P_3, \ldots, \varpi_1, \varpi_2, \ldots),$$

et il suffira de considérer un nombre limité des quantités

$$P_1, P_2, \ldots, \varpi_1, \varpi_2, \ldots$$

Un raisonnement analogue est applicable à d'autres phénomènes, par exemple aux niveaux minima. Considérons donc en particulier les niveaux minima de la rivière en un point : pour les années à saisons chaudes sèches dans les terrains imperméables (s'il y en a à l'amont du point considéré), $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ influeront peu ; N_a sera seulement fonction de $P_1, P_2, \ldots$

De même pour les dates δ_a où un bas niveau déterminé sera réalisé. Alors

$$(6) \qquad N_a = \psi(P_1, P_2, \ldots),$$

$$(7) \qquad \delta_a = \psi_1(P_1, P_2, \ldots).$$

[1] La théorie du chap. VI rend compte de toutes ces formules d'une manière bien plus rigoureuse.

Pour le cas d'une saison chaude pluvieuse dans les terrains imperméables en question il faudra ajouter à N_a et δ_a des termes correctifs positifs.

D'ailleurs la présence de N_p dans la formule suffira pour y introduire l'influence des saisons froides et chaudes précédentes, et il pourra se faire qu'on ait avec assez d'exactitude

$$N_a = \psi (N_p, P_1) \text{ (1)}.$$

. . . .

Supposons que k saisons froides par exemple agissent d'une manière sensible sur N_a. Pour un point A' plus à l'aval, N'_a, analogue à N_a, dépendra (2) d'une manière sensible de N_a et de l'état de la nappe des bords l'année précédente en A'; cet état dépend de N'_p, N'_{p_2},... et, dès lors on conçoit que N'_a puisse alors dépendre d'une manière sensible des pluies de plus de k saisons froides antérieures.

Supposons par exemple que, à une première approximation, on puisse représenter, en un point A du cours d'eau, N_a par

$$(8) \quad \begin{cases} N_a = K (P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 + \mu_4 P_4 + \ldots); \\ \text{on a} \\ N_p = K (P_2 + \mu_2 P_3 + \mu_3 P_4 + \ldots) \\ \mu_1 = 1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \mu_4 \geqslant \ldots \end{cases}$$

(ce qui est d'accord avec la formule linéaire de la page 127). A une certaine distance à l'aval, en A', N'_a dépend de N_a et du niveau N'_p précédant N'_a. Soit par exemple

$$(9) \quad \begin{cases} N'_a = K_1 N_a + K_2 N'_p, \\ N'_p = K_1 N_p + K_2 N'_{p_2}, \\ N'_{p_2} = K_1 N_{p_2} + K_2 N'_{p_3}. \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

(1) Loi II, p. 129 Comp. encore p. 122.
(2) En supposant qu'il n'y ait pas dans l'intervalle d'affluent important.

On trouvera

$$N'_a = KK_1 (P_1 + \lambda_1\mu_2 P_2 + \lambda_2\mu_3 P_3 + \ldots).$$

Calculons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ On a

$$\begin{cases} N'_a = K_1N_a + K_1K_2N_p + K_2^2N'_{p_2}, \\ \quad\; = K_1N_a + K_1K_2N_p + K_1K_2^2N_{p_2} + K_2^3N'_{p_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Admettons que

$$(10)\quad N'_a = K_1(N_a + K_2N_p + \ldots + K_2^nN_{p_n}) + K_2^{n+1}N'_{p_{n+1}};$$

on a

$$N'_{p_{n+1}} = K_1N_{p_{n+1}} + K_2N'_{p_{n+2}},$$

$$N'_a = K_1(N_a + K_2N_p + \ldots + K^nN_{p_n}) +$$

$$K_1K_2^{n+1}N_{p_{n+1}} + K_2^{n+2}N'_{p_{n+2}}.$$

La loi (10) est ainsi générale.

D'ailleurs, d'après

$$N'_a = K_1N_a + K_2N'_p,$$

supposons

$$P_1 = P_2 = P_3 = \ldots;$$

on a

$$N'_a = N'_p\ [1], \qquad N'_a(1 - K_2) = K_1N_a,$$

où l'on doit supposer K_1 et K_2 positifs, N'_a étant *physiquement* une fonction croissante de N_a et N'_p. On a ainsi

$$K_2 < 1,$$

[1] Les séries (8) sont convergentes ; donc lim $\mu_n = 0$ pour $n = \infty$.

et

$$\lim K_{2\,n=\infty}^{n} = 0;$$

c'est-à-dire que l'influence de N'_{p_n+1} sur N'_a tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Ceci posé, substituant à N_a, N_p, ... dans (10) les valeurs (8) on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{K} N'_a = K_1 \Big[\sum_{1}^{\infty} {}^i P_i \mu_i + K_2 \sum_{2}^{\infty} {}^i P_i \mu_{i-1} + \ldots + \\ \qquad K_2^n \sum_{n+1}^{\infty} {}^i P_i \mu_{i-n} \Big] + R_n, \\ \text{avec} \\ \qquad R_n = \frac{K_2^{n+1}}{K} N'_{p_n+1}. \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{K} N'_a = K_1 \left[P_1 + P_2 (\mu_2 + K_2) + P_3 (\mu_3 + K_2 \mu_2 + K_2^2) + P_4 (\mu_4 + K_2 \mu_3 + K_2^2 \mu_2 + K_2^3) + \ldots \right].$$

Cette série est évidemment convergente et

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 + \frac{K_2}{\mu_2} > 1, \\ \lambda_2 = 1 + \frac{K_2}{\mu_3} \mu_2 + \frac{K_2^2}{\mu_3} > 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si l'on compare cette formule avec la formule (8) qui donne N_a, on voit que le coefficient c_j de P_j sera plus grand que $KK_1\mu_j$. L'influence de P_j sur N'_a par rapport à celle de P_1, dont le coefficient est KK_1, est ici $\frac{c_j}{KK_1} > \mu_j$, alors que dans (8) elle n'est que μ_j. Autrement dit nous pouvons énoncer cette loi comme consé-

quence nécessaire de la loi de Dausse et de nos lois sur la prévision du débit minimum de la Vanne et des tarissements de la Somme :

Loi. — *En un point d'un cours d'eau à bords perméables dont une partie assez faible seulement du bassin est imperméable, plus le point est situé vers l'aval, et plus le niveau d'étiage dépendra probablement d'une manière sensible des totaux de pluies d'un plus grand nombre de saisons froides.*

Si l'on veut étudier ce niveau au moins pour les années où les pluies des saisons chaudes dans les parties imperméables d'amont ne sont pas trop fortes, il faudra faire intervenir d'autant plus de saisons froides antérieures que le point considéré est plus à l'aval. Par suite, plus le point est vers l'aval et plus ce niveau varie lentement d'une année à l'autre.

Ceci s'applique indifféremment aux niveaux minima et à leurs dates ou aux niveaux moyens.

Application pratique à la Chaussée. — Appliquons ces idées à la Marne à la Chaussée, en prenant pour les chiffres P_1, P_2, ... les totaux des pluies des saisons froides [1] à Chaumont (Haute-Marne), et pour ϖ_1, ϖ_2, ... les totaux des pluies des saisons chaudes à Bar-le-Duc (Meuse, à cause des parties imperméables voisines), contrôlés au besoin par ceux de Chaumont (si l'on veut tenir compte des parties imperméables du bassin situées à l'amont de Chaumont, aux sources de la Marne et du Rognon). Nous nous servirons du tableau XIV ci-après : nous y avons formé pour chaque année les totaux T des pluies des quatres saisons froides précédentes à Chaumont.

Formons alors un nouveau tableau, XV, où nous rangeons les années suivant les valeurs croissantes T :

Les résultats que nous pouvons tirer de là ne sont pas absolus : on y voit que, sauf pour deux années, les bas étiages sont plutôt dans la partie supérieure du tableau ainsi que les dates exception-

(1) Tableau XIV ci-après.

nellement prématurées où la cote — 0,34 a été réalisée pour la première fois.

Les minima oscillent [1] depuis 1888 entre — $0^m,34$ en 1888 et — $0^m,92$ en 1893. Leur moyenne est — $0^m,65$.

Nous pouvons en conclure les règles suivantes : quand le total T des pluies de quatre saisons froides consécutives à Chaumont est inférieur à 1600, on peut prévoir que, à moins d'un été très pluvieux dans la région, particulièrement à Bar-le-Duc, le niveau atteindra — 0^m70 à la Chaussée, ou au-dessous. Inversement, si ce total est voisin de 1700 (et même 1650), ou supérieur, et si les étés à Bar-le-Duc sont plutôt pluvieux (cas des quatre dernières lignes du tableau XV), on peut prévoir que les cotes d'étiage à la Chaussée seront supérieures à — $0^m,70$. Quand T n'atteint pas 1400, il y a des chances pour que la cote — 0,35 soit réalisée avant le 1er juillet.

On doit remarquer que, dans notre tableau XV, nous avons attribué la même importance aux pluies des saisons froides de quatre années consécutives. Il peut dès lors convenir, dans l'examen de ce tableau, de modifier les résultats à l'occasion en tenant compte des cas : 1° où la saison froide immédiatement précédente est très pluvieuse soit à Chaumont, soit à Bar-le-Duc ; 2° des cas où, soit la saison chaude, soit la saison chaude précédente, soit les deux sont très pluvieuses, surtout à Bar-le-Duc [2]. Exemples : années 1890 et 1891. En 1890 le minimum n'est que de — 0,45 alors qu'on pouvait le prévoir inférieur à — 0,70. Mais la saison chaude de 1890 à Chaumont et Bar-le-Duc est pluvieuse. En 1891 le minimum est de — 0,58 alors qu'on pouvait encore le prévoir à — 0,70 ; mais l'année 1891 a une saison chaude pluvieuse à Chaumont et suit l'année 1890 dont nous venons de parler : autrement dit, dans la formule (4) précitée, N_p a une valeur relative-

(1) Comp. loi III, p. 130. On remarquera que, dans le tableau XIV les 2 minima exceptionnels des bas niveaux coïncident bien avec le minimum de T.

(2) Il y a dans ce cas un phénomène analogue à celui dont nous avons parlé précédemment (p. 121 et 124) du déversement d'eaux de ruissellement provenant des terrains imperméables d'un bassin sur des terrains perméables qui en absorbent une partie.

ment plus forte que pour les autres années analogues de la partie supérieure de notre tableau.

On peut d'ailleurs obtenir des résultats à peu près analogues, et de bases plus conformes à la théorie que nous avons développée précédemment, en remplaçant $T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ par $T_1 = P_1 + P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{1}{2} P_4$. On obtient ainsi le tableau XVI ci-après.

On voit que le classement des années dans ce tableau par valeurs de T_1 croissantes ne diffère pas essentiellement, en général, de celui du tableau précédent : les exceptions s'expliquent de la même manière.

L'influence de T_1, et aussi celle de la sécheresse ou de l'humidité des saisons chaudes à Bar-le-Duc en ressort également.

En terminant ce qui concerne les bas niveaux à La Chaussée, nous croyons utile de remarquer que les années de 1890 à 1901 figurent presque toutes dans la moitié supérieure des tableaux XV et XVI, celles de 1883 à 1889 se trouvant dans la partie inférieure. On doit en conclure, en examinant en même temps rapidement les totaux de pluie des saisons chaudes, que la moyenne de dix ans de 1891 à 1900, soit pour les saisons chaudes ou froides, soit pour les années, doit être sensiblement inférieure à ce qu'elle est pour les années 1881 à 1890. En effet on obtient à cet égard le tableau suivant :

Années	Moyennes des saisons à Chaumont		Moyennes des saisons à Bar-le-Duc		Moyenne des minima à La Chaussée
	froides	chaudes	froides	chaudes	
1881-1890	418	460	460	526	— 0,535
1891-1900	367	434	396	432	— 0,72

La différence profonde entre les pluies des saisons chaudes et froides et les niveaux minima à La Chaussée pour les deux périodes en ressort immédiatement, par suite l'influence des pluies en question sur ces niveaux.

On remarquera en même temps que les dates du niveau minimum varient peu en général : il a lieu presque toujours en août, septembre ou octobre.

Les cotes moyennes à La Chaussée donnent lieu à des observations du même genre ; les voici à titre de renseignement :

Années	Saisons chaudes	Saisons froides (1)
1881-1890	$0^m,13$	$1^m,18$
1891-1900	$-0^m,23$	$1^m,01$

(1) Comp. *Annu. de la Soc. Météor.*, 1903, janv., p. 7. Les résultats qui y sont mentionnés pour La Chaussée (et qui comportent une faute d'impression, car il faut — 0,23 au lieu de 0,16) ont en réalité été établis après ceux qui précèdent. On trouvera déjà dans le *Manuel hydrologique* du bassin de la Seine (Paris, 1884, p. 39) l'indication de l'influence des pluies des saisons chaudes et froides sur les niveaux moyens de la Seine à Paris pendant les mêmes saisons.

CHAPITRE XIV

—

SUR LES TARISSEMENTS DE LA LAIGNES (CÔTE D'OR)

La Laignes sort des marnes de l'oolithe inférieure en Bourgogne, dans le canton de Bagneux-les-Juifs (Côte-d'Or), et se perd après un parcours de vingt kilomètres, dans les fissures de la grande oolithe, près du hameau de Vauginois. A l'aval, la vallée est sèche sur plus de vingt kilomètres jusqu'à Bissey-la-Pierre, où finit la grande oolithe. Là la Laignes réapparaît..

Le service compétent mesure, chaque été, à partir d'un point fixe, en descendant vers l'aval, la distance à laquelle le tarissement est bien caractérisé ; les résultats sont publiés chaque année (résumé annuel du service hydrométrique central, par exemple résumé de 1900, *Annu. Soc. Météor.*, 1902, p. 161) au moins pour la saison chaude ; les longueurs négatives accusent la sécheresse, puisque, dans ce cas, l'eau cesse de couler en amont même du point pris depuis longtemps comme origine.

Le tableau ci-joint XVII fait connaître de 1880 à 1901 les pluies des saisons froides et chaudes pour les stations voisines, Chanceaux (altitude 471 mètres), Saint-Seine (altitude 485 mètres) et Laignes (altitude 212 mètres) et les minima des moyennes mensuelles des longueurs mesurées des tarissements pendant la saison chaude, avec leurs dates. C'est ce que nous avons appelé les maxima des tarissements.

Nous avons cru utile de reproduire les totaux de ces stations, parce que dans ces dernières années les observations de Chanceaux, particulièrement celles de la saison froide 1897-1898, ont été considérées comme laissant à désirer.

Le terrain où coule la Laignes est un terrain essentiellement perméable ou demi-perméable (voir Belgrand, *la Seine, études hydrologiques*, p. 76, 209 et 212).

Nous avons pris, pour les périodes 1881-1890 et 1891-1900 les moyennes des quantités inscrites au tableau XVII en observant : 1° que pour Chanceaux le total de 1897-1898 (saison froide) paraît un peu faible et qu'il convient de prendre la moyenne de 1891-1901 ou celle de 1891-1901, déduction faite la saison froide 1897-1898, pour les saisons froides ; 2° que pour Laignes il manque trois saisons froides de 1881 à 1890 : ces saisons froides paraissant correspondre à une saison sèche, une ordinaire, une pluvieuse, la moyenne doit être à peu près convenable. On a alors le tableau ci-dessous :

Périodes	Chanceaux		Saint Seine		Laignes		Distances
	Saison froide	Saison chaude	Saison froide	Saison chaude	Saison froide	Saison chaude	
1881-1890	426	489	399	503	341	424	— 1640
1891-1900	366 (11 ans) 391 (10 ans)	482	392	439	320	398	— 4142

On remarquera que les totaux des saisons froides et chaudes de la première période sont plus élevés que ceux de la deuxième.

Il en est de même des maxima des tarissements.

On peut donc considérer ce tableau comme vérifiant l'influence des pluies des saisons froides ou chaudes sur les longueurs des tarissements de la Laignes.

Rangeons maintenant dans le tableau XVIII ci-après les totaux des saisons froides par ordre de grandeur croissante à Chanceaux.

Ce tableau semble indiquer une légère influence des saisons froides sur la longueur du tarissement maximum ; mais, en somme, cette influence n'est pas toujours très nette. Le tableau XIX, où les maxima des tarissements sont rangés par ordre de dates croissantes, montre que presque tous les bas minima se produisent en août, septembre ou octobre.

On y remarque encore que les saisons froides à totaux les plus forts à Chanceaux (totaux supérieurs à 420) sont presque tous dans la première moitié du tableau, les saisons froides à totaux les plus faibles étant dans la deuxième (à part 1882 et 1880, 1890 pouvant être classé dans les deux). Il semble donc qu'on puisse dire :

Quand le total des pluies de la saison froide à Chanceaux dépasse 420, le maximum du tarissement paraît se produire habituellement avant la fin d'août ; quand il est inférieur à 420 il se produit au plus tôt en général en août.

Y a-t-il quelque chose d'analogue pour les longueurs des tarissements ? Il semble évident que les saisons froides ont une action ; toutefois un autre élément influe, croyons-nous, d'une façon capitale.

Comptons (tableau XIX) parmi les cinq mois d'avril à août inclus le nombre de mois où, chaque année, le total des pluies est inférieur à 50 millimètres, et classons les années par ordre d'importance de ce nombre ; on obtient le tableau XX.

On y voit d'une façon très visible que l'importance du tarissement croît avec ce nombre de mois. Le fait est particulièrement net pour l'année 1890 qui, sauf sur ce point, ne présentait d'autre caractère exceptionnel que d'être la dernière année (comp. page 155 à 156 à propos de Cérilly) d'une périole décennale pluvieuse, et dont, cependant, le tarissement est de beaucoup le plus faible depuis vingt ans.

On pourrait encore chercher à mettre en évidence l'influence des pluies de la saison chaude en formant un tableau avec les totaux des pluies d'avril à août rangés par ordre de grandeur croissante et mettant en regard les longueurs des tarissements. Le résultat est analogue à celui du tableau XX.

En résumé, la longueur du tarissement paraît dépendre très sérieusement de la répartition des pluies d'avril à août à Chanceaux, et de leur importance (1).

(1) Comp. *Résumé des observ.* du service hydr. du bassin de la Seine 1883, par M. Heude, page 23.

Ces phénomènes s'expliquent suffisamment comme il suit : à la suite des mois de la saison chaude où les pluies sont assez faibles, la décroissance du débit et l'augmentation du tarissement doivent être assez régulières. L'importance du tarissement maximum devrait alors dépendre surtout des pluies de la saison froide. Mais quand la saison froide (et aussi les saisons chaudes et froides antérieures) est pluvieuse, la nappe et la rivière sont beaucoup plus sensibles aux pluies d'été : le premier mois d'été légèrement pluvieux déterminera une diminution appréciable du tarissement, dont le maximum aura alors surtout lieu de bonne heure, car il y aura toujours un mois d'été pluvieux à Chanceaux [1].

D'autre part, si les pluies d'été sont bien réparties, ou si elles sont assez fortes, et en même temps réparties de façon à dépasser souvent le chiffre de 50, ou bien l'humidité du sol sera bien entretenue et l'évaporation faible, ou bien les pluies d'été alimenteront la nappe, surtout si certaines parties du bassin ne sont pas très perméables.

[1] La forme des nappes dans la région peut avoir une certaine influence (Comp. le régime de la source de Cérilly, à crues brusques, et des sources du Havre, à crues lentes). On est ici à la limite des terrains perméables et imperméables.

CHAPITRE XV

—

REMARQUES SUR LES SOURCES DU HAVRE

Pour montrer nettement des vérifications expérimentales possibles de certaines théories de la 1re partie (chap. V, p. 86-91 et note (1) p. 83) nous annexons à notre ouvrage un tableau XXI donnant les débits journaliers moyens par mois en mètres cubes depuis 20 ans des sources de Saint-Laurent et de Bellefontaine qui servent à l'alimentation de la ville du Havre, tableau que nous devons à l'obligeante communication du directeur du service des eaux. Nous n'en parlerons pas en détail, nous contentant de renvoyer au *Manuel hydrologique* du bassin de la Seine (Paris, 1884, de Préaudeau, p. 29 et 103) et au mémoire de M. Meurdra (*Mém. Assoc. fr. pour l'avan. des Sc.*, Congrès du Havre, 1877).

Considérons par exemple les sources de Bellefontaine étudiées déjà par M. Meurdra. Dans la période 1882–1901, leur débit moyen journalier chaque mois varie entre 775 mètres cubes en 1896 et 2800 en 1897. Le débit varie en général peu dans le courant de l'année : il présente assez souvent un minimum dans le 2me semestre. Toutefois, surtout quand une crue sérieuse des sources se produit, c'est-à-dire quand le débit atteint au moins 1400 mètres cubes pour Bellefontaine, il peut parfaitement arriver que le débit aille ensuite en décroissant constamment pendant deux ans environ. Ex. : 1883-1884, 1895–1896, 1897–1898 ; aucun minimum ne se produit alors vers la fin de l'année.

Les sources de Saint-Laurent présentent des phénomènes analogues.

Si l'on met en regard de ces débits les pluies au Havre (Sanvic). (tableau XXII), on remarque :

1°, que la crue de 1883 est précédée (maximum 2100 mètres cubes en juin 1883) d'une saison chaude et d'une saison froide très pluvieuses; 2°, que deux saisons froides très pluvieuses en 1886-1887, 1887-1888 ont donné une crue modérée des sources de Bellefontaine (1400 mètres cubes en mars 1887) et une crue un peu plus nette pour celles de Saint-Laurent (29000 en juin 1887); 3°, que les pluies des saisons froides pluvieuses de 1893-1894, 1894-1895 et de la saison chaude pluvieuse de 1894 ne donnent qu'une petite crue de Bellefontaine (1175 mètres cubes en mars 1895) et de Saint-Laurent (24400 mètres cubes en octobre 1895); 4°, que les pluies de la saison chaude de 1896 et la saison froide 1896-1897 occasionnent des crues exceptionnelles des deux sources (2800 mètres cubes pour Bellefontaine en mai 1897, 40000 pour Saint-Laurent en août) [1]. Il semble donc que les sources de Saint-Laurent vérifient un peu plus nettement que celles de Bellefontaine les lois que nous avons trouvées théoriquement dans la première partie et mentionnées tout à l'heure. Il semble aussi, d'après les saisons froides 1893-1894, 1894-1895 que les débits dépendent très sérieusement des débits des années précédentes. A la suite de plusieurs saisons froides sèches, la nappe est appauvrie, et une saison froide pluvieuse n'a pour effet que de ramener le débit à un chiffre normal. Autrement dit : le débit sera chaque année une fonction des pluies de plusieurs saisons froides antérieures (3 ou 4 au moins), peut-être aussi un peu (année 1882) des pluies des saisons chaudes, quand celles-ci sont extraordinairement pluvieuses. C'est en somme une nouvelle vérification, au moins dans l'ensemble, de l'étude précitée de M. Meurdra [2].

Nous espérons d'ailleurs revenir plus en détail sur le régime de ces sources, et nous n'insisterons pas davantage ici.

[1] On remarque incidemment que le maximum de Saint-Laurent est toujours en retard de plusieurs mois sur celui de Bellefontaine.

[2] Congrès du Havre, 1877.

CHAPITRE XVI

SUR LES GRANDES CRUES DE LA SEINE

Nous croyons utile de mentionner ici une loi, qui nous paraît bien remarquable, relative aux grandes crues de la saison froide pour la Seine à Paris et Mantes et à leur rapport avec l'importance des pluies des saisons chaudes précédentes [1]. Nous n'avons encore pu dégager d'une façon absolument sûre les causes de cette loi ; nous nous contenterons donc d'un exposé très sommaire.

Prenons depuis 1874 les moyennes géométriques des pluies des saisons chaudes pour l'ensemble du bassin de la Seine (tableau II des résumés du service hydrométrique, *Ann. de la Société de Météorologie*) : rangeons par ordre de grandeur croissante, et mettons en regard les hauteurs maxima des crues de la saison froide suivante à Paris (Austerlitz) et Mantes : nous obtiendrons le tableau XXIII.

En admettant qu'il doive y avoir un certain rapport entre les totaux des pluies et les hauteurs maxima des crues, celui-ci sera forcément au moins aussi apparent pour Mantes, qui correspondra mieux à la moyenne des pluies du bassin, la Seine à Mantes étant influencée par l'Oise.

Il ressort nettement de ce tableau que, depuis 1874, les saisons chaudes au-dessous de la moyenne 378 milimètres ne sont pas suivies de crues de la Seine supérieures à 4^m40 à Paris-Austerlitz et $6^m,01$ à Mantes. Depuis la même date, il y a 8 saisons froides où le niveau maximum a été à Paris (Austerlitz) au moins égal à

[1] Elle est en partie indiquée dans notre résumé de la période 1891-1900 pour le bassin de la Seine (*Annu. de la Soc Météor.*, 1903, p. 6).

5 mètres et à Mantes à $6^{m},40$; ces saisons froides ont toutes été précédées de saisons chaudes au-dessus de la moyenne.

On remarque encore que, sauf en 1890, qui est compris entre deux saisons froides très sèches (255 et 275, la moyenne étant de 320), les 13 saisons chaudes supérieures à la moyenne ont été suivies à Mantes de crues au moins égales à 5 mètres dans la saison froide, et à $3^{m},10$ à Paris (Austerlitz), soit 12 sur 13 dans ce cas ; 8 sur 13 de ces saisons chaudes ont été suivies de crues d'au moins 5 mètres à Paris et $6^{m},40$ à Mantes, ce qui ne se trouve pas une seule fois pour les 14 saisons chaudes inférieures à la moyenne.

Parmi ces 14 dernières saisons chaudes, 6 seulement ont coïncidé dans la saison froide avec des crues d'au moins 5 mètres à Mantes et 5 avec des crues d'au moins $3^{m},70$ (commencement de submersion des banquettes de halage) à Paris.

Il y a là, croyons-nous, des résultats très intéressants.

Nous n'osons conclure encore à la prévision au moins partielle et à longue échéance de la possibilité ou de l'impossibilité des grandes crues de la Seine pour certaines saisons froides.

Un examen sommaire tend à montrer une loi analogue pour certaines parties du bassin de la Seine ; considérons le tableau XXIV, analogue au tableau XXIII, pour la Haute-Seine à Bray de 1881 à 1900, les saisons chaudes étant rangées par ordre de totaux croissants à Troyes. Il semble bien que la loi ne soit plus ici aussi nette ; mais l'examen des totaux de pluie correspondants à Chanceaux (aux sources de la Seine) tend à montrer que la loi deviendrait plus certaine si l'on envisageait, comme nous l'avons fait dans le tableau XXIII pour l'ensemble du bassin de la Seine, les moyennes d'un certain nombre de stations du bassin de la Haute-Seine. Nous n'insisterons donc pas davantage pour le moment [1].

[1] A. Durand-Claye indique dans son *Hydraulique agricole* (Leçons rédigées et publiées après sa mort par M. F. Launay, p. 133), en précisant un peu le rôle assigné par Belgrand aux pluies préparatoires, que les crues d'automne et d'hiver à Paris, quand il y en a, sont accompagnées ou précédées d'un automne pluvieux.

MÉMOIRE ANNEXE [1]

(26 avril 1904)

—

SUR LES COURBES DE DÉBIT DES SOURCES ET LES DÉCRUES DES RIVIÈRES

Dans ce mémoire annexe :

1° Nous indiquons une application des chap. II et III du mémoire précédent au calcul du volume d'eau contenu à chaque instant dans les nappes souterraines de diverses sources (Vanne et Dhuis) ; nous donnons une formule de prévision pour les variations du débit de l'ensemble des sources de la Vanne, captées pour la ville de Paris, dans la saison chaude.

2° Nous montrons que, en divers points des rivières du bassin de la Seine (Marne à La Chaussée, Saulx à Vitry-le-Brûlé, Haute-Seine à Bray, Ource à Autricourt, Seine à Paris (pont d'Austerlitz)), on peut représenter approximativement les variations du niveau pendant les décrues, lorsque les pluies ont cessé, par une formule $h = h_0 e^{-\alpha t}$, où h_0 est un niveau réalisé un peu après le maximum, α un coefficient qui doit avoir une valeur déterminée en chaque station respectivement pour les décrues habituelles (avec ou sans gelées) de la saison froide, et pour celles de la saison chaude. Mais les valeurs de α sont ici bien plus fortes (20 à 30 fois) que pour les sources à courbe de débit exponentiel.

Enfin nous ébauchons une théorie de ces décrues dans les bassins renfermant une proportion notable de terrains perméables.

(1) Un résumé de cet mémoire a été commmuniqué à l'Académie des Sciences de Paris, le 25 avril 1904.

CHAPITRE PREMIER

—

SUR LA PUISSANCE DES NAPPES DES SOURCES DE LA VANNE

Nous avons montré (p. 13 et 27) que, si une source possède un graphique de prévision des débits ou une courbe des débits, le volume V contenu à chaque instant dans la nappe, ou, ce qui en joue le rôle, était une fonction croissante de Q

$$V = f(Q); \tag{1}$$

on a

$$dV = -Qdt = f'(Q)\,dQ, \tag{2}$$

$$dt = -\frac{f'(Q)}{Q}\,dQ = -\varphi'(Q)\,dQ, \tag{3}$$

avec

$$\varphi'(Q) = \frac{f'(Q)}{Q}, \tag{4}$$

$$t + \varphi(Q) = t_0 + \varphi(Q_0) = c^{te} \tag{5}$$

L'équation (5) est celle de la courbe des débits (coordonnées t et Q), et aussi celle du graphique de prévision (coordonnées Q et Q_0, paramètre $t - t_0$).

Or l'expérience permet de déterminer la courbe (5) graphiquement et par le calcul. La résolution de l'équation trouvée donne Q ; (4) donne $f'(Q)$, et, en intégrant, on obtient V.

Jusqu'ici nous avons obtenu seulement 2 formes de (5), les formes

(6)
$$\left\{\begin{array}{l} Q = Ae^{-\alpha t},\ (\alpha > 0),\ \text{(Cérilly, Vanne)}, \\ Q = \dfrac{A}{(1+\alpha t)^2},\ (\alpha > 0),\ \text{(partie non permanente pour Armentières, Vanne)}. \end{array}\right.$$

Il paraît intéressant de calculer les valeurs de $V = f(Q)$ correspondantes.

1°
$$Q = Ae^{-\alpha t},$$
$$\log_e Q - \log_e A = -\alpha t,$$
$$t + \frac{\log_e Q}{\alpha} = c^{te},$$

d'où

$$\varphi(Q) = \frac{1}{\alpha} \log_e Q,$$
$$\varphi'(Q) = \frac{f'(Q)}{Q} = \frac{1}{\alpha Q},$$
$$f'(Q) = \frac{1}{\alpha},$$
$$V = f(Q) = \frac{Q}{\alpha} + C.$$

Si l'on admet, ce qui paraît naturel, que V et Q s'annulent en même temps [1],

(7)
$$V = \frac{Q}{\alpha}.$$

Réciproquement, cette formule donne

$$Q = Ae^{-\alpha t}.$$

[1] Le volume V est ici le volume *en mouvement* dans la nappe, continue ou non : c'est le volume utile. Le volume supplémentaire qui pourrait y exister ne varie pas et ne joue aucun rôle.

Application à la source de Cérilly. — Nous avons trouvé pour Cérilly $\alpha = 0,1066$, quand t est exprimé en mois dans les formules (6), et Q en litres par seconde; pour que la formule (7) soit homogène, il faut exprimer α en prenant pour unité de temps la seconde, comme dans Q. Donc

$$V = \frac{Q}{0,1066} \times 30 \times 86400,$$

$$\frac{V}{Q} = 24\,315\,000.$$

Pour le débit qui est à peu près maximum, de 300 litres par seconde,

$$V = 7\,294\,500,$$

soit 7 300 000 mètres cubes en chiffres ronds. Pour le débit minimum connu, 64 litres, $V = 1\,556\,160$ mètres cubes.

Application à la source du Miroir [1] (**Vanne**). — Nous avons ici $\alpha = 0,05065$ (t en mois, Q en litres par seconde) :

$$V = \frac{Q}{0,05065} \times 2\,592\,000,$$

$$\frac{V}{Q} = 51\,000\,000.$$

Pour le débit, qui est à peu près maximum, de 300 litres par seconde, $V = 15\,300\,000$ mètres cubes. Pour le débit de 150 litres, à peu près minimum dans la période novembre 1886-novembre 1900, $V = 7\,650\,000$ mètres cubes. La nappe corrélative est 2 fois plus puissante que celle de Cérilly : ceci n'est pas étonnant, puisque, dans la période en question, le débit minimum du Miroir a toujours été bien plus fort que celui de Cérilly.

On a encore pour le graphique de prévision des débits de la source du Miroir.

$$\log_e Q_0 - \log_e Q = 0,05065\,(t - t_0).$$

(1) Consulter *Annu. de la Soc. Météor. de France*, 1903, p. 206, où nous disons aussi quelques mots de la Fontaine de Vaucluse.

Application aux sources de la Dhuis. — D'après les tableaux indiqués antérieurement et le graphique corrélatif, on pourra poser en moyenne

$$Q = Q_0 e^{-\alpha(t - t_0)},$$

$$\alpha \log e = 0{,}0165, \qquad \alpha = 0{,}0380.$$

Le coefficient α de tarissement est encore plus faible que celui de la source du Miroir.

$$V = \frac{Q}{0{,}038} \times 30 \times 86\,400, \qquad \frac{V}{Q} = 68\,210\,000$$

approximativement.

Pour le débit maximum de 294 litres par seconde,

$$V = 20\,000\,000 \text{ mètres cubes.}$$

Pour le débit minimum de 173 litres par seconde,

$$V = 11\,800\,000 \text{ mètres cubes.}$$

La nappe des sources de la Dhuis est, par conséquent plus puissante que celle des sources de Cérilly et du Miroir.

2°

$$Q = \frac{A}{(1 + \alpha t)^2}.$$

$$1 + \alpha t = \sqrt{\frac{A}{Q}},$$

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{A}{Q}} - 1\right).$$

$$\varphi(Q) = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{A}{Q}},$$

$$\varphi'(Q) = \frac{\sqrt{A}}{2\alpha} Q^{-\frac{3}{2}} = \frac{f'(Q)}{Q},$$

$$f'(Q) = \frac{\sqrt{A}}{2\alpha} Q^{-\frac{1}{2}},$$

$$f(Q) = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} Q^{\frac{1}{2}} + C = V.$$

On supposera encore ici

$$C = 0,$$

$$V = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} Q^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Application à la source d'Armentières (Vanne). — Nous avons indiqué pour cette source la formule ([1])

$$Q = 158^{l},8 + \frac{740^{l}}{(1 + \alpha t)^2}, \qquad \alpha = 0,120.$$

Nous ne pouvons évaluer que le volume qui correspond à la partie non permanente

$$Q_1 = \frac{0^{mc},74}{(1 + 0,12 t)^2}.$$

On a

$$A = 0,74, \qquad \alpha = \frac{0,12}{30 \times 86400},$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{0,74}}{0,12} 30 \times 864000 \times \sqrt{Q_1}$$

$$= 18576000 \sqrt{Q_1}.$$

Pour le débit

$$Q = 0^{mc},8988,$$

un des plus forts constatés,

$$Q_1 = 0,74, \quad \sqrt{Q_1} = 0,86, \quad V_1 = 15975000,$$

ou 16 000 000 mètres cubes en chiffres ronds, soit un peu plus du double du volume maximum (7 300 000 mètres cubes) trouvé pour Cérilly. Avec le débit

$$Q = 0^{mc},2588,$$

voisin du plus faible débit constaté,

$$Q_1 = 0,1 \quad \sqrt{Q_1} = 0,316, \quad V_1 = 5870000 \text{ mètres cubes environ.}$$

([1]) On pourrait peut-être plus exactement affecter le terme 158,8 d'un facteur fonction de t et voisin de 1. M. Boussinesq a indiqué pour le débit Q d'Armentières une autre expression (*Journal de Math.*, 1904) somme de deux exponentielles.

CHAPITRE II

SUR LES VARIATIONS DE DÉBIT DE L'ENSEMBLE DES SOURCES DE LA VANNE

Soient les courbes de débits de plusieurs sources distinctes (sources profondes). Admettons que, dans l'étendue du bassin où se trouvent ces sources, les pluies de la saison froide puissent être considérées comme à peu près proportionnelles en chaque point (¹) (loi de Fournié pour le bassin de la Seine). Les volumes emmagasinés par les nappes de chacune des sources pendant cette saison froide sont à peu près proportionnels. Si le régime des sources est tel que ces volumes emmagasinés soient, au début de chaque période de régime propre, une fraction importante du volume total de chaque nappe, on conçoit que ces volumes totaux, au même moment, pourront être, non pas forcément proportionnels, mais proportionnels à $\frac{1}{n}$ près. Autrement dit, avec une certaine approximation, les conditions initiales du volume d'une des nappes des sources étant déterminées, celle des nappes des autres sources le seront aussi à peu près. Quand le volume est V pour une de ces nappes, le volume de chacune des autres nappes est, à peu près $\left(\text{à } \frac{1}{n} \text{ près par exemple}\right)$, une certaine fonction de V, par suite aussi le volume total ΣV de l'ensemble des nappes. A V correspondra toujours un débit Q déterminé, par suite un débit déter-

(¹) C'est-à-dire que, en deux points distincts du bassin, les totaux de pluie correspondants sont H_1, H_2, $\frac{H_2}{H_1}$ étant une quantité qui ne dépend à peu près pas de la saison froide considérée. Il s'agit d'un bassin limité où les pluies surviennent et cessent simultanément.

miné pour chacune des sources, finalement un débit ΣQ pour l'ensemble des sources, et l'on aura, avec une certaine approximation, dans les limites de la pratique, $\Sigma Q = F(\Sigma V)$. D'après les chap. I et II de notre mémoire précédent, il en résulte que l'on pourra poser

$$\varphi(\Sigma Q_0) - \varphi(\Sigma Q) = t - t_0,$$

à une certaine approximation :

Les choses se passeront à peu près comme s'il existait une courbe des débits pour l'ensemble des sources [1].

On pourra aussi, par exemple si, parmi les sources, certaines sont à débit très lentement variable, d'autres à débit assez rapidement variable, diviser les sources en deux ensembles corrélatifs sur lesquels il sera logique de raisonner séparément.

Ceci conduit à envisager la possibilité de déterminer un graphique de prévision donnant une exactitude suffisante pour l'ensemble des sources de la Vanne, comme si ces sources formaient une source unique ou deux sources. Opérant comme pour la source de Cérilly, on forme à l'aide des résultats de jaugeages communiqués par les Ingénieurs de la ville de Paris le tableau XXV donnant, pour l'ensemble des sources de la Vanne, de 1878 à 1903, les débits moyens mensuels en litres par seconde dans la période de régime propre. On remarque de plus qu'un certain nombre de petites sources (Drains, Noé, Gaudin, la Bouillarde, une partie aussi peut-être de Chigy et le Maroy, etc.) ont un débit peu variable; en joignant ce débit aux $158^l,8$ de débit presque permanent d'Armentières et Drains, on obtient environ 500 litres.

[1] Toutefois il pourra arriver au bout d'un certain nombre d'années que les quantités négligées pour arriver à ce résultat, et qui peuvent s'ajouter dans certains cas (par exemple à la suite d'une période d'années sèches ou humides), altéreront sensiblement les prévisions. Alors on en tiendra compte par un terme correctif, par exemple égal à l'erreur commise l'année précédente, ou encore en refaisant une nouvelle courbe des débits pour l'ensemble des sources d'après les résultats les plus récents : cette courbe sera valable pour 10 ou 15 ans, parfois plus. Autrement dit la formule $\Sigma Q = F(\Sigma V)$ n'est approximativement vraie que pour un nombre limité d'années : il y a des perturbations décennales, analogues aux perturbations séculaires en astronomie.

Ce chiffre est peut-être légèrement trop fort pour les années les plus sèches. légèrement trop faible pour les années les plus humides : il peut être considéré comme exact à 50 litres près en plus ou en moins.

Ceci posé, nous cherchons à construire un graphique

$$\varphi(Q_0) - \varphi(Q) = t - t_0,$$

où Q_0, débit initial (deuxième colonne) est l'abscisse, t, exprimé en mois, l'un des chiffres 1, 2, ..., 8, Q le débit correspondant pris pour ordonnée, et nous inscrivons à côté de chaque point celui de ces 8 chiffres qui correspond à Q. On voit que l'on peut, avec une approximation très convenable, représenter ce graphique, c'est-à-dire les courbes $t = c^{te}$, par des droites passant par le point de coordonnées $0^{mc},5$ et $0^{mc},5$; on a

$$\log(Q_0 - 0,5) - \log(Q - 0,5) = \alpha_1 \tau$$

où les logarithmes ont pour base 10, $\alpha_1 = 0,04644$, τ étant le temps écoulé en mois depuis la date (troisième colonne du tableau) du maximum. La courbe des débits est

$$Q = 500^l + 1\,500^l\, e^{-0,1068\, t},$$

(1) En vue des études physico-mathématiques que je poursuis sur les débits des sources, surtout de celles qui servent à l'alimentation des villes, je serais très reconnaissant à toute personne de France ou de l'étranger qui pourrait m'envoyer ou me faire envoyer un tableau du débit, au moins une fois par mois (à la rigueur tous les deux mois), d'une source quelconque ou de plusieurs (réunies ou séparées) pour une période de dix à quinze ans « au moins ». Ce tableau pourra être publié par moi, s'il ne présente pas trop d'anomalies, avec l'indication du nom de l'auteur de l'envoi.

Je fais la même demande pour les sources d'eaux minérales. Pour ces dernières, un tableau des températures une fois par mois pendant la même période pourrait m'être également utile.

Je préférerais ces renseignements pour les sources à débit ou à température notablement variable (relativement) dans la période considérée (dans la proportion de 2 à 3 au moins, par exemple, pour les débits des sources). Mais j'accepterais aussi avec reconnaissance les autres renseignements.

Si pareil document se trouvait publié dans un livre ou recueil quelconque « pour certaines sources »; j'en désirerais l'indication bibliographique. Je possède déjà ce qu'il me faut pour les sources des villes de Paris, le Havre et Bordeaux, pour la fontaine de Vaucluse.

(ADRESSE : E. Maillet, rue de Fontenay 11, Bourg-la-Reine, Seine).

qui donne les débits : 2 000, 1 848, 1 711, 1 588, 1 478, 1 379, 1 290, 1 210, 1 138, 1073, 1 015, 963, 916, 874 litres, au bout de 0 à 13 mois après que le débit 2 000 litres a été réalisé. Si, pour une année considérée, dans la période où la loi de Dausse est applicable (Mai à novembre en général), le débit maximum Q_0 est le $k^{\text{ème}}$ de ces chiffres, le débit au bout de τ mois est donné par le $(k + \tau)^{\text{ème}}$ de ces chiffres.

Pratiquement, les erreurs dans les prévisions avec cette règle dépassent rarement 100 litres. Dans les saisons chaudes pluvieuses, lorsque les débits sont bas, les pluies paraissent renforcer un peu ces derniers.

CHAPITRE III

—

SUR LES COURBES DE DÉCRUES DES COURS D'EAU (TERRAINS PERMÉABLES)

Considérations théoriques. — Soient un point P d'un cours d'eau et le bassin qui l'alimente. Quand une crue se produit, c'est, d'après Belgrand, au moins pour le bassin de la Seine, que le point dit *de ruissellement* est atteint pour les terrains qu'il appelle imperméables [1], le point *de saturation* pour les terrains qu'il appelle perméables. Supposons que, au cours de la crue, les pluies viennent à cesser (ou encore à diminuer sérieusement) dans le bassin versant, à un moment m. Le maximum et la décroissance de la hauteur d'eau, c'est-à-dire la *décrue*, vont se produire d'abord sur les affluents supérieurs, puis vers l'aval. Les terres s'égouttent plus ou moins rapidement, soit superficiellement, soit dans leur intérieur. L'influence des phénomènes superficiels cessant très vite, la décrue est très rapide dans les terrains imperméables ; elle est bien plus lente dans les terrains perméables. A peu près à partir du moment où les pluies ont cessé, le bassin versant ne subit plus d'apports d'eau extérieurs

Soit un petit affluent a; dans son bassin supposé renfermant une proportion notable de terrains perméables on peut admettre, au moins provisoirement, que l'état d'imbibition E_m vers le moment m est toujours en rapport avec la hauteur maxima en un point p

(1) Il ne s'agit, bien entendu, que d'une imperméabilité relative ; les terrains que Belgrand appelle imperméables sont des terrains susceptibles de fonctionner assez souvent dans la pratique, après un arrosage suffisant (pluies préparatoires), et avec le climat du pays, comme des terrains *géologiquement* ou *physiquement* imperméables.

de a, laquelle aura lieu un certain temps assez court après m ; plus généralement on admettra encore qu'au cours de la décrue le niveau en p à un instant donné est une fonction de l'état d'imbibition E un temps assez court [1] auparavant $\left(\frac{1}{2}\right.$ journée au plus, par exemple$\left.\right)$.

Ceci posé, soit h_m la hauteur maxima, m' un autre moment pendant la décrue ; à ce moment correspondra un certain état d'imbibition $E_{m'}$ et, peu après, au temps $m' + \varepsilon$, une hauteur $h_{m'}$: $h_{m'}$ est une fonction de m'.

Supposons que, dans une autre décrue, $h_{m'}$ soit encore réalisée. D'après nos hypothèses, à cette hauteur $h_{m'}$ correspond encore l'état $E_{m'}$. Il est bien évident qu'à partir de ce moment, dans la 2me décrue, la décrue en p suivra la même loi en fonction du temps que dans la 1re décrue. Autrement dit, à partir du moment m où le régime du bassin de a n'est plus influencé par des chutes de pluie, la décrue *non influencée* va suivre des lois tout-à-fait analogues à celles que suivent les sources dans la période de régime propre ou non influencé. On pourra déterminer pour le point p une relation

$$\varphi(h_0) - \varphi(h) = t - t_0 + \varepsilon - \varepsilon_0 \tag{9}$$

analogue à (5) (p. 13). Si l'on détermine t_1 de façon que [2]

$$\varphi(h_0) - \varphi(h_m) = t_1 + \varepsilon_1 - t_0 - \varepsilon_0,$$

la hauteur h au temps $t_1 + \theta + \varepsilon_2$ (ε_2 peu différent de ε_0 et ε_1) sera donnée pour la décrue considérée par

$$\varphi(h_0) - \varphi(h) = t_1 + \theta + \varepsilon_2 - t_0 - \varepsilon_0.$$

[1] Le point que Belgrand appelle *point de saturation* pour les terrains perméables est, pensons nous, atteint quand les terres commencent à transmettre, par égouttement, une partie de l'eau qu'elles reçoivent.

[2] ε_0, ε_1, ε_2 représentent un temps moyen plus ou moins bien déterminé, mais assez petit $\left(\frac{1}{2}\right.$ journée par exemple$\left.\right)$ correspondant au temps que l'eau d'égouttement met pour parvenir au cours d'eau en p.

Pratiquement, on détermine (9) avec une exactitude suffisante en attribuant à ε_0, ε_1, ε_2 une valeur moyenne constante et posant $t + \varepsilon = t'$, $t' - t'_0 = t - t_0$. On pourra, bien entendu, construire, comme pour les débits des sources, des graphiques, en prenant h_0 pour abscisses, h pour ordonnées, $t - t_0$ comme paramètre. Ces graphiques donnent lieu à une théorie plus ou moins analogue à celle exposée antérieurement dans notre mémoire précédent (chap. II et III). En particulier, si les courbes $t - t_0 = c^{te}$ sont des droites concourantes,

$$h + C = (h_0 + C)\, e^{-\alpha (t - t_0)}.$$

Ceci posé, voyons ce qui va se passer au point P. Si le bassin affluent n'est pas trop étendu, il arrivera fréquemment, au moins dans le bassin de la Seine, que sur les divers affluents a, a', a'',... les hauteurs h_m, h'_m, h''_m,.., maxima seront suffisamment proportionnelles d'une crue à l'autre et auront lieu à peu d'intervalle de temps l'une de l'autre, les pluies cessant d'ailleurs à peu près au même moment. Si ces divers affluents traversent en outre des terrains n'ayant pas de grandes différences (comme nature, pentes ou comme cultures), les fonctions φ ne seront pas très distinctes, et il pourra arriver que la hauteur H en P, à partir du moment du maximum, hauteur qui est fonction des hauteurs h_m, h'_m, h''_m,.., sur a, a', a'',... puisse se représenter, dans les limites de la pratique (ou une partie de ces limites) par

$$\varphi(H_0) - \varphi(H) = t - t_0. \tag{10}$$

Cette courbe (variables H et t) est ce que nous appellerons *la courbe de décrue.*

On pourrait le vérifier aussi, en raisonnant ici, comme on l'a fait pour le débit de l'ensemble des sources de la Vanne dans la période de régime propre.

Ici encore, les choses se passeront en chaque point du cours d'eau comme s'il existait une courbe de décrue.

Il est bien entendu que les prévisions que l'on pourra tirer de cette courbe une fois construite cesseront de s'appliquer s'il y a de nouvelles pluies.

Cette notion de *courbes des décrues pour les rivières* est, comme on le voit, bien voisine de celle de *courbe des débits*. Nous croyons toutefois, pour des raisons qui seront exposées en détail plus loin, que ces deux notions doivent, jusqu'à nouvel ordre, être considérées comme distinctes, en général. Les débits des sources considérées par nous (Vanne et Dhuis) décroissent très lentement et ne varient relativement que peu (dans le rapport de 3 ou 2 à 1 au plus environ) dans une période de plusieurs mois. Ils sont le résultat d'écoulements très lents dans des nappes souterraines, à travers des canaux capillaires. Les crues des rivières décroissent très vite dans les terrains imperméables, moins vite dans les terrains perméables, mais le rapport du débit maximum aux débits les plus faibles dans une même année est généralement un chiffre bien plus grand que pour ces sources. Ce n'est pas le rapport R du débit maximum au débit minimum dans une longue période, mais c'est un chiffre plus ou moins comparable. Ainsi ce rapport R est [1] pour la Marne à Chaumont 2117, pour le Grand Morin à Pommeuse 306, pour la Marne à La Chaussée 90, pour la Seine 96 à Troyes, 47 à Paris. Ces rapports sont, comme on le voit, très supérieurs à ceux que nous avons trouvés pour les sources de la Vanne et de la Dhuis. Cependant, pour quelques petites rivières, R est faible (Vanne à Marly-le-Roi 7, 3; Essonne à Montauger 2, 3; pour la source de Cérilly, c'est un peu moins de 5). On peut en conclure que ces dernières sont alimentées surtout par des sources profondes issues de nappes où l'écoulement est lent et se fait par des canaux capillaires. Pour les autres, au contraire, les eaux de la décrue doivent provenir de l'égouttement des terres, des sources éphémères [2], etc, en tout cas d'écoulements qui se font dans des conditions bien différentes de celles où ont lieu les écoulements pour les sources de la Vanne.

Applications pratiques. — Des courbes de décrue ou une notion analogue ou équivalente ont déjà ou semblent avoir été indiquées soit implicitement soit explicitement par quelques auteurs :

[1] *Manuel hydrologique du bassin de la Seine*, Paris, 1884, p. 26.
[2] BELGRAND, *la Seine*, Paris, 1872, p. 204.

en France, à propos de la Fontaine de Vaucluse, qui, il est vrai, présente des conditions hydrologiques spéciales, et qu'on ne saurait encore classer exactement (1); en Italie, très nettement, à propos du débit de l'ensemble des affluents du lac Majeur (bassin versant 6200 kmqs). Dans une œuvre très intéressante, couronnée par l'Institut Lombard de Milan (*Sul Regime idraulico dei Laghi*, Ulrico Hœpli, Milano, 1897, 350 pages; prix Kramer accordé en 1895 à ce mémoire signé du pseudonyme *Montanus*), M. l'Ingénieur Gaudenzio Fantoli indique, au chapitre IV (p. 55, intitulé « i periodi di decrescenza degli afflussi al lago (Maggiore) », une relation entre le débit total des cours d'eau qui affluent au lac et le temps, aussitôt après la cessation des pluies ; « la décroissance, dit-il, se fait suivant une certaine loi, légèrement variable avec la saison, mais très peu variable *dans la saison froide, d'octobre à mars* ». Principalement d'après les observations (2) de novembre-décembre 1886, janvier-février 1888, novembre 1892, février 1893, l'auteur arrive à la loi expérimentale suivante, valable d'octobre à mars :

Débit Q = 688 525 425 365 300 250 240 195 193 163 105 90 83 72 65 mc.

au bout du

temps t = —7 —3 0 2 6 9 11 14 18 26 49 57 66 87 101 jours.

M. Fantoli représente cette loi de décroissance par la formule (3)

$$t = 5400 \left\{ \frac{1}{q - 20} - \frac{1}{q_0 - 20} \right\} \qquad (11)$$

(1) Voir Dyrion, *Bull. de l'Hydraul. agricole*, fasc. Q, 1894 ; Pochet, id., fasc. Y, 1901. Par son importance et son régime, il semble que ce soit plutôt l'émergence d'une rivière souterraine ou l'exutoire de lacs souterrains.

Dans un réservoir ou lac qui se vide sans recevoir d'eau extérieure, le débit Q est, à chaque instant, fonction du volume contenu seul, et, par conséquent, ce réservoir ou lac (mémoire précédent, p. 13) possède une courbe des débits (5). Le raisonnement pour y arriver est identique à celui fait pour les nappes, et s'étend à tout système hydraulique où $V = f(Q)$.

(2) C'est à M. Fantoli lui-même, que nous devons la gracieuse communication de son mémoire et d'un certain nombre de renseignements complémentaires : nous l'en remercions ici bien vivement.

(3) Cette formule peut encore s'écrire, en prenant $q_0 = 425$, pour $\tau = 0$,

$$q = 20 + \frac{405}{1 + 0{,}075\tau}.$$

(t exprimé en jours, q, q_0 en mcs par seconde) où q et q_0 varient de 700 à 65 mètres cubes. Le graphique correspondant, formé des courbes $t =$ constante, est constitué par une famille d'hyperboles équilatères ayant leurs asymptotes parallèles aux axes Oq, Oq_0 : les branches utiles de ces hyperboles ont pour asymptote une parallèle à Oq_0 située au dessus de Oq_0 ; mais, quand t est petit, cette asymptote est très élevée au-dessus de Oq_0.

On peut aussi, d'après nos calculs, substituer à la formule (11) la formule

$$q = 50 + \frac{375}{(1 + 0{,}036\tau)^2}, \tag{12}$$

avec $q_0 = 425$ mcs pour $\tau = 0$: τ est exprimé en jours. Ces deux formules donnent les débits suivants :

(11) $q =$	425	251	182	121	94	78	68
(12) $q =$	420	253	177	113	88	75	68
au bout de $\tau =$	0	10	20	40	60	80	100 jours.

D'après une lettre que nous a envoyée M. Fantoli, d'autres formules de décrue à type exponentiel, auraient été indiquées sans explications, croyons-nous, par M. l'Ingénieur Zunini pour deux petits cours d'eau des mêmes régions.

M. Fantoli a remarqué que sa formule s'appliquait encore à la période de décrue de janvier-mars 1891. Il a bien voulu nous adresser les tableaux inédits des décrues d'octobre-novembre 1899 et décembre 1900-février 1901, avec les calculs de débits tout faits. Nous en donnons l'extrait suivant qui permet de vérifier suffisamment la loi de M. Fantoli, et qui est relatif au mois de décembre 1900 (tableau XXVI).

Les pluies (ou neiges fondues) sont celles observées à la station de Braggio (altitude 1313 mètres) ; les hauteurs d'eau, à midi, sont celles du Tessin (Ticino), émissaire du lac Majeur, à la station hydrométrique de Sesto Calende [1] à la sortie du lac. Le débit q, qui correspond à la formule (11), est la partie du débit Q_e sorti du lac, qui n'est pas fournie par l'abaissement du niveau du lac : ces abaissements étant toujours très faibles, il en résulte que

[1] En cas de besoin, consulter par exemple le *Guide Joanne* pour la Suisse et les cartes annexées.

$Q_e - q$ n'est, comme nous l'a fait remarquer M. Fantoli, déterminé chaque jour qu'approximativement, mais que la moyenne de cette quantité en 4 ou 5 jours consécutifs peut être considérée comme assez exacte. Sous cette réserve, on vérifie que le tableau XXVI des débits q est suffisamment d'accord avec la formule (11) et le tableau corrélatif de la page 195.

Il nous a paru intéressant de chercher à obtenir des résultats semblables pour le bassin de la Seine, ce qui n'a pas encore été fait, à ce que nous croyons. Nous avions, du reste, commencé notre étude ci-après sur la Haute-Seine à Bray avant d'avoir connaissance des travaux de M. Fantoli.

Ici, nous disposons d'un nombre et d'une variété d'observations considérables, grâce à la publication annuelle du service hydrométrique central du bassin de la Seine (résumé et atlas), et la loi peut être vérifiée pour une assez longue période [1] et un assez grand nombre de crues.

D'autre part, la grande perméabilité d'une partie du bassin permet de dégager d'une façon très nette l'influence de cette perméabilité [2], que l'on sait, d'après les observations des Ingénieurs du

[1] De 1873 à 1900, M. Fantoli avait, croyons-nous, moins d'observations pour le lac Majeur ; de plus, les pluies y sont bien plus importantes que dans le bassin de la Seine (moyenne pour une assez longue période 1780 millimètres).

Le bassin du lac Majeur est exceptionnellement pluvieux, à cause du voisinage des Alpes et du massif du Saint-Gothard : on a noté à Cicogna (alt. 919 mètres), en octobre 1892, 1555 millimètres de pluie en 20 jours. Les mois de beaucoup les plus pluvieux sont avril-mai et octobre (régime très voisin de celui du bassin de Vaucluse, *Ann. Soc. Météor. de Fr.*, déc. 1903, p. 207).

Ce lac est beaucoup plus sensible aux crues que tous les lacs suisses : on y a observé une élévation de niveau de $1^m,83$ en 24 heures, les 5-8 octobre 1872, alors que cette montée ne dépasse pas $0^m,60$ pour ces derniers. Les bas niveaux ont toujours lieu de novembre à mars, les maxima annuels des crues en mai-juin et d'août à décembre. La crue exceptionnelle d'octobre-novembre 1868 a atteint, à la sortie du lac, sur le Tessin, à Sesto Calende, $6^m,94$ (Fantoli, *loc. cit.*, p. 105-111 et passim).

Le lac est très allongé (longueur de 60 kilomètres pour une superficie de 214 kilomètres carrés).

[2] Elle suffit à faire varier sensiblement les coëfficients dans certaines formules d'annonces de crue. L'un des premiers de ces types remarquables de formules à coëfficients variables, peut être le 1er, est dû à M. Babinet (*Résumé d'observations* pour 1891, p. 67).

service hydrométrique, être considérable. Les froids sont beaucoup plus sérieux qu'à Vaucluse, où d'ailleurs les eaux souterraines sont protégées par une très grande épaisseur de terrain ; les pluies sont bien moins fortes que dans le bassin du lac Majeur, en sorte que l'influence des sécheresses peut être bien plus grande. Il peut donc être ici nécessaire, et nous reconnaîtrons tout à l'heure qu'il en est bien ainsi, de distinguer plusieurs types de décrue pendant les périodes où il ne pleut pas :

1° Décrues normales de la saison froide (1er novembre-30 avril).

2° Décrues de la même saison avec froids sérieux (température moyenne à 0° ou au-dessous pendant plusieurs jours).

3° Décrues de la saison froide pour la 1re crue de cette saison, avec bas niveaux auparavant.

4° Décrues de la saison chaude (1er Mai-31 octobre).

Avec ces distinctions nous avons étudié pour la période de 1873-1900 les décrues pour des bassins renfermant une étendue suffisante de terrains perméables, aux points indiqués dans le tableau suivant :

Station hydrométrique	Rivière	Bassin versant (approximativement)	Observations
La Chaussée . .	Marne	7 000^{kmq}	
Vitry-le-Brûlé .	Saulx	2 400 »	Affluent de la Marne
Bray-sur-Seine .	Haute-Seine	10 000 »	
Autricourt . .	Ource	400 »	Affluent de la Hte-Seine

Nous indiquerons sommairement plus loin le résultat de nos essais pour Paris, Bezons et Damery.

Décrues de la Marne à La Chaussée [1]. — Nous avons rangé les crues dans 4 tableaux, tableau XXVII, correspondant aux 4 catégories mentionnées ci-dessus, en y indiquant les dates de la plus haute cote dont nous avons tenu compte, puis les cotes successives de 2 jours en 2 jours. Nous n'avons considéré que des

(1) Plus haute crue connue 3m,38 (1844). Les débordements commencent à la cote 2m,65 à 2m,70, à partir de laquelle les montées sont très lentes ; c'est à cette cote que cesse la navigation ; les crues sont graves à 2m,95.

périodes de décrues où les pluies étaient nulles ou paraissaient négligeables. La plus haute cote a été choisie en tenant compte à peu près de la durée d'arrivée des eaux d'une pluie à La Chaussée, soit environ 3 à 4 jours.

Pendant la saison froide, dans les périodes de froids sérieux, les terres peuvent geler plus ou moins profondément, et l'égouttement se produit beaucoup moins bien [1]; la décroissance doit être plus rapide que dans les décrues normales de la saison froide. Mais si, ensuite, le dégel qui, souvent, dans le bassin de la Seine, est accompagné d'une crue [2], se produit avant la fin de la décroissance, celle-ci devient bien plus lente, et même peut devenir plus lente que dans les périodes normales.

Pendant la saison chaude, la végétation et l'évaporation contribuent à diminuer sérieusement la quantité d'eau à égoutter ou à écouler; la moindre imbibition des berges des cours d'eau, et aussi des terres, avant la crue, agit dans le même sens. La décroissance doit encore ici être plus rapide [3] que dans les périodes normales de la saison froide. L'expérience nous montrera

(1) Nous ne recherchons pas ici si la rapidité d'imbibition et d'égouttement des terres n'est pas fonction de la température : les expériences de Poiseulle sur les tubes capillaires et certaines expériences de M. Debray (De Préaudeau et Pontzen, *Procédés généraux de construction*, Paris, Béranger, 1901), qui a vérifié que, à 100°, l'imbibition de certaines pierres (calcaires très tendres) se fait aussi rapidement en peu d'heures qu'à la température ambiante en six mois, conduiraient à penser que la température joue un rôle notable, au moins pour les terres superficielles, et que, en particulier, la rapidité d'imbibition des terres est fonction croissante de la température. Cela contribuerait à expliquer la loi de Dausse pour les terrains perméables (Belgrand, *la Seine*, p. 65). Il y aurait probablement, à ce sujet, à reprendre plus en détail les expériences de M. Debray (Comp. expér. de M. Tollet, *Ann. des Ponts et Chaussées*, 1890, 1er sem. p. 489).

D'autres expériences également importantes au point de vue hydrologique seraient aussi désirables pour vérifier l'hypothèse de la p. 204 et la loi exponentielle de l'égouttement, et examiner si notre coefficient k ne varie comme α avec la saison (ou la température).

Enfin, en vue de recherches ultérieures (théorie mathématique du ruissellement superficiel) nous souhaiterions encore que des expériences fussent faites au sujet de l'écoulement de l'eau sur des plans ou surfaces inclinés et sous une très faible épaisseur.

(2) Voir notre note de l'*Annu. de la Soc. Météor.*, 1903, p. 10.

(3) On sait de plus que, en été, les maxima des crues s'affaissent très rapidement (Marne, Oise par exemple) en se propageant vers l'aval comme cela résulte des formules d'annonces du type de M. Babinet (p. 197, ci dessus).



que ces causes d'augmentation de la rapidité de décroissance sont parfois plus importantes que les froids sérieux (graphique 9 de La Chaussée).

Enfin, aux passages d'une saison froide à une saison chaude, ou inversement, ce phénomène de réduction se produit encore, mais moins accentué.

Nous avons alors cherché à vérifier au moins pour 2 de ces types de décrues (saison froide normale, saison chaude) l'existence d'une loi approximative de la forme

$$\varphi(h_0) - \varphi(h) = t - t_0 \quad (13)$$ [1],

h_0 étant la cote au temps t_0, h la hauteur au temps t.

Nous avons ainsi obtenu les résultats suivants : pour chacun de ces types de décrue, on a approximativement, ou en moyenne,

$$0^m,6 + h = (0^m,6 + h_0)e^{-\alpha t}$$

ou

$$\log(h_0 + 0^m,6) - \log(h + 0^m,6) = \alpha t \log e = \alpha_1 t;$$

le graphique formé des courbes

$$t - t_0 = c^{te},$$

avec h_0 comme abscisses et h comme ordonnées, est, en effet, formé très sensiblement de droites passant par le point fixe de coordonnées $-0^m,6$ et $-0^m,6$.

Prenant les logarithmes dans le système de base 10 et posant

$$\alpha_1 = \alpha \log e = \frac{\alpha}{2,3},$$

on a, t étant exprimé en jours, et h en mètres,

	t en jours		t en mois
	α_1	α	α
Décrues normales de la saison froide . .	0,021	0,0483	1,449
» » chaude . .	0,04	0,092	2,76

[1] Voir les graphiques 9 corrélatifs pour $t - t_0 = 4$ jours, et la plupart des stations hydrométriques considérées ici, les graphiques 10 pour $t - t_0 = 8$ jours, et les graphiques 11.

En prenant $h_0 = 3^m,00$ on obtient les tableaux suivants de décrue :

Cotes au bout de $t =$	0	2	4	6	8	10	12	14 jours
Pendant la saison froide. (décrues normales)	300	267	237	209	185	162	141	125 cms
Pendant la saison chaude.	300	239	189	147	112	83	59	39 cms

Cotes au bout de $t =$	16	20	30	40	50	60 jours
Pendant la saison froide. (décrues normales)	106	77	25	—8	—27	—40 cms
Pendant la saison chaude.	22	— 3	—37	—44	—49	—53 cms

Ces derniers tableaux (¹) permettent facilement des prévisions de décrue : soit t_0 une valeur de t lue dans la ligne correspondante ; h_0 la hauteur de la même colonne dans une des autres lignes : θ jours après t_0, la hauteur à prévoir est celle qui figure dans la même ligne du tableau, et dans la même colonne que $t_0 + \theta$.

On remarquera que ces prévisions sont assez précises pour les décrues normales de la saison froide et celles de la saison chaude. Mais en tous cas ces tableaux ou les graphiques corrélatifs permet-

(¹) Dans la réalité on observe, tout-à-fait au début, une décroissance relativement lente, quand on prend une cote initiale sensiblement supérieure à $2^m,50$ ou $2^m,60$, sans doute à cause des débordements. Un graphique plus exact (gr. 9 et 10) permettra d'en tenir compte.

Si l'on se borne aux cotes inférieures à $2^m,50$ ou $2^m 60$, la loi exponentielle sera beaucoup plus rigoureusement vérifiée. Ainsi, on pourra pour la saison froide (décrue normale), quand $h_0 \leqslant 2^m,60$, adopter la formule

$$h + 0^m,5 = (h_0 + 0^m,5)\, e^{-\alpha t}, \quad \alpha_1 = 0,024, \quad \alpha = 0,0552,$$

à laquelle correspond le tableau suivant de décrue

$t =$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20	30	40	50	60 jours
décrue	250	219	190	164	143	123	105	88	74	49	7	—17	—31	—39 cms

Pour la saison froide, dans les périodes de froids sérieux, quand

$$0^m,30 \leqslant h_0 \leqslant 2^m,50,$$

tent souvent d'obtenir facilement, à 2 ou 3 jours près, la date approximative où un niveau important sera réalisé : cessation des submersions, cote de relèvement des barrages, etc. Ces niveaux n'étant pas eux-mêmes fixés avec une précision extrême, on voit que les prévisions pourront avoir toute l'exactitude désirable [1].

On remarquera la différence profonde qui sépare les décrues de la saison chaude et celles de la saison froide : tandis que le rapport $\frac{h + 0,60}{h_0 + 0,60}$ décroît comme $e^{-0,0483t}$ dans la saison froide, ce rapport décroît presque comme le carré de cette fonction dans la saison chaude. La comparaison des 2 tableaux précédents montre que les décrues des périodes de froids sont un peu moins rapides que dans la saison chaude, plus rapides que dans les périodes normales de la saison froide.

Il est intéressant de comparer les coefficients α de tarissement obtenus avec ceux des sources de la Vanne, qui ont une loi de décroissance exponentielle : nous avons trouvé, t étant exprimé en mois, comme coëfficient de tarissement du débit de ces sources pendant la saison chaude $\alpha = 0,1066$ pour Cérilly, $\alpha = 0,05065$ pour le Miroir, $\alpha = 0,0380$ pour la Dhuis ; le plus grand de ces coëfficients est celui de Cérilly. On voit que le coëfficient α pour les hauteurs $h + 0^m,6$ de la saison froide à La Chaussée est près de 14 fois plus fort que celui de Cérilly, le coëfficient de la saison chaude 26 fois plus fort. On sait, en réalité, que le débit d'une rivière est à peu près proportionnel, non à une fonction linéaire de la hauteur, mais à la puissance $\frac{3}{2}$ d'une pareille fonction. Ici, on

on a

$$h + 0^m,3 = (h_0 + 0^m,3)\, e^{-\alpha t},$$

$$\alpha_1 = \alpha \log e = 0,0418, \quad \alpha = 0,0961,$$

et le tableau suivant de décroissance :

$t =$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20	30	40	50 jours
décrue	250	201	161	127	100	77	58	43	30	11	— 14	— 24	— 28cms.

(1) C'était un des desiderata de M. G. Lemoine, quand il était ingénieur en chef du service hydrométrique du bassin de la Seine, qu'on pût faire des prévisions pour les décrues.

pourra admettre pour La Chaussée, avec une exactitude suffisante dans des limites étendues

$$Q = M(h + 0{,}6)^{\frac{3}{2}}.$$

Le coefficient du tarissement du débit est, en réalité, à peu près $\frac{3}{2}\alpha$, c'est-à-dire 21 fois plus fort qu'à Cérilly pour les saisons froides, 39 fois plus fort pour les saisons chaudes.

Il est donc bien naturel de ne pas croire que le phénomène de la décrue soit dû, pour sa partie la plus importante, à l'écoulement des eaux à travers de *longues* nappes souterraines. Soit dans la partie perméable du bassin de la Marne jusqu'à la Chaussée, soit aussi plus ou moins dans la partie dite imperméable, qui ne mérite ce nom, comme nous l'avons dit plus haut, que temporairement [1], pendant la période où le point de ruissellement est atteint, et qui ne le mérite plus quand les pluies cessent, c'est-à-dire par suite dans les périodes de décrue que nous étudions, il semble plus naturel d'admettre que le sol joue le rôle d'une vaste éponge : d'abord, il contient de l'eau accumulée dans un certain nombre de cavités ; enfin, et surtout, des masses de terre imbibées, plus ou moins divisées, s'égouttent au profit d'une multitude de petits canaux *non capillaires* qui peuvent aboutir à des sources éphémères. C'est de là que provient la plus grande partie des eaux qui coulent au moins dans le premier mois ou les deux premiers mois de la décrue ; après, le débit ne décroît plus que d'une manière très lente (en admettant, bien entendu, qu'il ne pleuve pas) et le débit n'est plus soutenu que par des sources provenant de longues nappes souterraines, pour lesquelles la décroissance du débit est infiniment moins rapide. La *variation* de débit de ces dernières sources pendant les décrues étudiées pourra être négligée à une première approximation.

(1) Voir à ce sujet Belgrand, *la Seine*, p. 200 et 264, pour les bassins du Grand Morin et de l'Yonne, le *Manuel hydrologique*, p. 5, enfin nos notes de l'*Annuaire de la Soc. Météor*, pour le bassin du Grand Morin (1901, p. 275) et de l'*Association franç. pour l'avanc. des Sc.*, Mém. du Congrès d'Ajaccio, 1901, p. 333, pour le bassin de la Marne à Chaumont. Dans ces 2 notes, les chiffres que nous avons donnés pour les pertes par évaporation (ou végétation) comprennent aussi les pertes par égouttement, très faibles par mètre carré dans les terrains dits imperméables au bout de peu de jours après chaque crue.

L'application théorique de cette manière de voir peut d'ailleurs conduire à la loi exponentielle des décrues. Considérons un petit cours d'eau pendant la période de décrue : à un instant donné t, un volume v de terre dans le bassin versant va contenir une quantité d'eau $v\varphi(t)$ susceptible de s'égoutter. Admettons que le débit fourni pendant le temps dt soit proportionnel à cette quantité : v perd $qdt = kv\varphi(t)dt$; cette différentielle est égale, en valeur absolue, à la diminution du volume d'eau $v\varphi'(t)dt$; donc :

$$kv\varphi(t)\,dt + v\varphi'(t)\,dt = 0$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -k, \qquad \varphi = Ae^{-kt}$$

$$q = Akve^{-kt}.$$

Pour l'ensemble des terres du petit bassin, où l'on supposera que k varie peu d'un point à l'autre, on aura pour la quantité Qdt totale perdue à l'instant t par les terres une expression telle que

$$Q = \Sigma A_1 e^{-kt} = Be^{-k_1 t},$$

où k_1 diffère peu de k ; d'ailleurs, si le bassin est assez petit, les quantités qui passent en un point p du cours d'eau à l'instant t_1 seront des quantités fournies par les terres à des instants qui varient entre t_1 et $t_1 - \theta$, θ n'ayant pas une valeur bien considérable $\left(\frac{1}{2}\text{ journée au plus}\right)$; pendant le temps θ, Ae^{-kt} varie peu, et l'on aura une valeur très approchée du débit Q_1 en p à l'instant

$$t_2 = t_1 - \frac{\theta}{2},$$

par exemple, en prenant

$$Q_1 = \Sigma A_1 e^{-kt_2} = Be^{-k_1 t_2}, \ (k_1 = c^{te}).$$

Finalement, en p, *la loi de la décrue sera sensiblement une loi exponentielle.*

Inversement, si la loi de décroissance du débit fourni par une

masse de terre qui s'égoutte est exponentielle, on a, en désignant par w le volume de l'eau contenue dans cette masse :

$$q = vA_2e^{-kt},$$
$$qdt = -dw = vA_2e^{-kt}\,dt,$$
$$w = v\frac{A_2}{k}e^{-kt} + C = \frac{q}{k} + C.$$

w étant ici la quantité d'eau de la masse de terre susceptible de s'égoutter, pour

$$q = 0, \qquad w = 0;$$

donc

$$C = 0,$$
$$q = kw,$$

et *le débit est proportionnel à chaque instant à w* [1].

[1] Toute cette théorie part des mêmes principes que notre théorie du mémoire précédent, chap. VIII, p. 136. La première n'aboutit pas tout à fait aux mêmes conséquences que la deuxième, car cette dernière s'applique surtout aux sources profondes et aux longues nappes, tandis que la première ne vise principalement que les sources éphémères et les terres plus superficielles susceptibles, par leur structure, de se vider ou s'égoutter à peu près complètement en deux mois au plus.

Ceci suggère l'idée d'une théorie mathématique tenant compte à la fois de l'égouttement comme ci-dessus et de la circulation souterraine comme à la page 34. Les équations (21) et (22) deviendront plus compliquées; nous y reviendrons : (21) est remplacée par une équation de la forme (21bis) p. 55, (22) par une équation analogue. Voir p. 215.

On peut chercher à appliquer cette théorie des pages 204-205 aux calcaires tendres ou grossiers qui constituent des parties importantes du bassin de la Haute-Seine et de la Marne. On a, pour un volume

$$v = 1, \qquad q = Ake^{-kt},$$
$$X_t = \int_0^t qdt = (-Ae^{-kt})_0^t = A(1 - e^{-kt}).$$

Le volume total d'eau contenu dans v est $X_\infty = A$; le volume perdu au bout du temps t est $A(1 - e^{-kt})$; le volume restant Ae^{-kt} : le rapport R_1 de ce volume au volume initial est e^{-kt},

Mais nous savons, d'après les expériences de M. Tollet déjà citées (p. 136 et 199) que, t étant exprimé en jours, on a approximativement, pour

$$t = 64 \text{ heures} = \frac{64}{24} \text{ ou } \frac{8}{3} \text{ jours},$$

$$R_1 = e^{-\frac{8}{3}k} = \frac{11}{12}, \qquad e^{\frac{8}{3}k} = \frac{12}{11},$$

Nous allons maintenant étudier, d'après les mêmes procédés, les lois des décrues dans les autres stations hydrométriques précitées.

Décrues de la Saulx à Vitry-le-Brûlé. — Nous avons encore classé les crues de la même manière (tableaux XXVIII ci-après). Mais nous n'avons construit de graphiques que pour le premier et le quatrième types (p 198 et gr. 9, 10, 11).

On obtient sensiblement [1]

$$h + C = (h_0 + C) e^{-\alpha t},$$

les graphiques étant encore formés de droites, et le tableau suivant, avec les mêmes unités :

Décrues	t en jours		t en mois	C
	α_1	α	α	
Décrues normales de la saison froide .	0,022	0,0506	1,518	— 0m,2
Décrues de la saison chaude. . . .	0,0312	0,07176	2,153	— 0m,1

d'où

$$k = \frac{3}{8}\frac{\log 12 - \log 11}{\log e} = \frac{3 \times 2,3}{8} \times 0,03779 = 0,0326 \text{ environ.}$$

Le chiffre de $\frac{11}{12}$ n'étant sans doute qu'approximatif, on ne peut s'empêcher de remarquer combien cette valeur de k et les valeurs de α trouvées précédemment ou plus loin (saison froide) pour la Marne et la Haute-Seine sont voisines ; cette coïncidence pourrait constituer une vérification remarquable de notre théorie ; mais nous n'insisterons pas à ce sujet tant que nous n'aurons pas d'expériences plus précises sur la dessiccation et l'égouttement des terres et des roches, en particulier des calcaires.

Incidemment nous remarquerons que le même rapport R_1 a été trouvé par M. Tollet pour les meulières égal à $\frac{1}{5}$, ce qui donne $k = 0,6$ environ. Cette valeur est infiniment plus forte que pour les calcaires tendres ou grossiers, et elle aide à montrer que, dans certains terrains à meulières, la décrue due à l'égouttement doit être très rapide, au moins au début. Nous citerons à titre de vérification les crues du Grand-Morin.

[1] Plus haute crue connue à Vitry-le-Brûlé, 3m,03 (1861). Les submersions commencent à la cote 2m,30, mais ne sont graves qu'à 2m,80.

On en déduit, en prenant $h_0 = 3^m,00$, les tableaux suivants de décrue :

$t =$	0	2	4	6	8	10	12jrs
Saison froide (Décrue normale) . . .	300	273	249	227	207	189	172cms
Saison chaude	300	261	228	198	173	151	132cms
$t =$	14	16	20	30	40	50	60jrs
Saison froide. (Décrue normale). . .	158	144	122	81	57	44	33cms
Saison chaude	116	102	79	44	26	18	14cms

La différence entre les décrues de la saison chaude et les décrues normales de la saison froide est un peu moins marquée que pour La Chaussée. Mais le coefficient de tarissement pour ces dernières décrues est presque le même aux deux stations.

Décrues de la Haute Seine à Bray. — Nous avons encore classé les décrues de la même manière ; mais ici une réserve est nécessaire.

A La Chaussée (Marne) les plus grandes hauteurs d'eau considérées sont inférieures à $2^m,97$, et la cote des débordements y est de 2^m70 ; à Vitry-le-Brûlé (Saulx), les plus grandes hauteurs considérées sont inférieures à $2^m,86$ pour les deux catégories de crues auxquelles nous avons fait correspondre un graphique (13), et la cote des débordements y est de $2^m,30$.

Lorsqu'une rivière est débordée, sa largeur superficielle peut être beaucoup plus grande qu'avant, et, même dans les périodes de non-influence, aussitôt après le maximum, la décroissance doit

(1) Plus haute crue connue $3^m,13$ (janvier 1861). Le relèvement des barrages s'opère généralement vers la cote $1^m,00$. Les submersions commencent vers la cote $1^m,80$ à $2^m,00$, et la navigation montante cesse vers la cote $2^m,20$, la descendante vers $2^m,60$. A la cote $2^m,80$, les débordements ont 3 kilomètres de largeur.

être moins rapide qu'elle ne serait pour une même hauteur, si les berges étaient, sur une longueur assez étendue, supérieures au plus élevé des niveaux atteints. Il doit en résulter, comme nous l'avons vu, que plusieurs des formules obtenues précédemment donneront pour les débuts de la décroissance dans les grandes crues des hauteurs un peu trop faibles au bout de t jours. Aussi les graphiques que nous avons dressés pourront-ils alors servir aux annonces, avec un peu plus de perfection pour les grandes crues; on aura même la faculté d'y donner aux courbes les légères inflexions qui peuvent être nécessaires dans certaines régions du plan (1).

Mais, à la Chaussée et Vitry, dans les limites considérées, les débordements ne sont pas assez importants pour altérer beaucoup, en général, l'approximation donnée par les formules.

Il en est différemment à Bray, où, d'ailleurs, les débordements commencent plus tôt que dans les stations précitées, savoir à la cote $1^m,80$ à $2^m,00$, et durent beaucoup plus longtemps (47 jours de suite en janvier-mars 1893, 49 en janvier-mars 1900).

Si l'on construit, dans les limites des décrues indiquées au tableau ci-après, pour la saison froide, le graphique (13) formé des droites $t - t_0 = c^{te}$, on observe que ces courbes sont formées de droites passant par l'origine tant que h et h_0 sont $\leqslant 2^m,20$; au-delà ces courbes se relèvent sensiblement au-dessus du prolongement de ces droites, conformément à ce que nous avons dit tout à l'heure.

Nous nous sommes donc contenté de construire les courbes $t - t_0 = c^{te}$ pour $h_0 \leqslant 2^m,20$ dans les décrues normales de la sai-

(1) Ainsi la courbe $t = 4$ jours relative aux périodes de froids à La Chaussée est, à peu près, une ligne brisée formée par une droite quand $h_0 \leqslant 2^m,50$, et une autre droite faisant un angle plus grand avec Oh_0 quand

$$2^m,50 \leqslant h_0 \leqslant 2^m,80.$$

Voir encore gr. 10, diverses courbes $t = 8$ jours figurées telles que les donne l'expérience, avec (conformément au conseil de M. Jordan) l'indication des points exacts résultant de nos tableaux numériques. On ne s'étonnera pas de la convexité de ces courbes pour les plus bas niveaux : plus h_0 est petit, plus devient grande l'influence relative, que nous avons négligée précédemment, des sources plus profondes.

son froide, celles de la saison chaude et les décrues avec froids. On obtient sensiblement

$$h = h_0 \, e^{-\alpha t},$$

et le tableau suivant :

	t en jours		*t* en mois
	α_1	α	α
Décrues normales de la saison froide . .	0,01693	0,03894	1,168
Décrues de la saison chaude	0,02288	0,0526	1,579
Décrues pendant les froids	id.	id.	id.

En prenant $h_0 = 2^m,20$, on est conduit ainsi aux tableaux suivants de décrue :

$t =$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20	30 jours
Saison froide (dé crue normale) .	220	203	188	174	161	149	138	127	118	101	68
Saison chaude et périodes de froids.	220	198	178	160	144	130	117	105	95	77	»

La loi de décroissance est la même pendant les grands froids et dans la saison chaude.

Décrue de l'Ource à Autricourt. — L'Ource est un petit affluent de la Haute-Seine, qui s'y jette un peu à l'amont de Bar-sur-Seine, et joue un rôle important dans l'annonce des crues à Bray-sur-Seine. Son bassin à Autricourt étant beaucoup plus petit que les bassins étudiés précédemment, l'étude de la loi des décrues à cette station hydrométrique présentait un intérêt spécial. Nous n'y avons, d'ailleurs, considéré que les décrues normales de la saison froide. Pour celles-ci nous nous sommes contenté de construire

le tableau XXX ci-après des niveaux de 5 en 5 jours [1]. On obtient encore sensiblement :

$$h = h_0 e^{-\alpha t},$$

avec $\alpha_1 = 0{,}02385$, $\alpha = 0{,}05485$, $30\,\alpha = 1{,}6456$.

Ces coëfficients sont plus forts que ceux de Bray, et comparables à ceux de Vitry et La Chaussée.

En prenant $h_0 = 1^m{,}50$, on obtient le tableau suivant de décrue :

$t =$	0	2	4	6	8	10	15	20	25	30
Décrue normale de la saison froide.	150	134	120	108	97	87	66	50	38	29

L'influence des froids sur la rapidité de la décroissance ne paraît ici avoir quelque importance que lors des très grands froids, par exemple en janvier-février 1895.

Remarque I. — On peut se demander si le Tessin, émissaire du lac Majeur à Sesto Calende, ne présenterait pas une loi de décrue de même nature pour la saison froide. On remarquera que, ici, dans la période de décrue, le débit Q de l'émissaire sera une fonction de $t - t_0$, Q_0 débit initial de l'émissaire [2], q_0 débit initial affluent. Il y a une variable de plus que dans (13) ; mais il pourra arriver assez souvent que, soit quand la décrue commence, soit quelques jours après, par suite de l'effet régulateur du lac, x_0, niveau initial du lac, étant dans une certaine mesure en relation avec q_0, le niveau x du lac puisse être considéré comme une fonction de q, débit affluent. A partir de ce moment, Q, fonction de x, dépend de q seul, et l'on peut écrire $Q = f(Q_1, t - t_1)$; on doit avoir un graphique de décrue analogue à (13).

Plus généralement, si pour une valeur de $t - t_0$, 10 jours, par exemple, on construit, pour chaque décrue la courbe

[1] La plus haute crue connue y a atteint $1^m{,}52$ (11 mars 1896). Les submersions commencent à la cote $0^m{,}90$, mais ne sont sérieuses qu'à $1^m{,}25$. Au sujet de l'Ource, voir Belgrand, *la Seine*, p. 215.

[2] Ou encore du niveau initial x_0 du lac, puisque Q_0 est fonction de x_0.

$Q = F(Q_0, q_0, t - t_0)$ dans le plan d'axes OQ_0 (abscisses) et OQ (ordonnées), on obtiendra une courbe fonction de q'_0. D'après les remarques précédentes, ces courbes devront se confondre, si q_0 est bien choisi, quelque temps après le commencement de la décrue. En effet, prenant les périodes de décrues des 1er janvier-11 février 1888, 3 novembre 1892-12 février 1893 (1), octobre-novembre 1899, septembre 1900-février 1901, on voit que l'on a sensiblement (Q, Q_0 en mois)

$$Q - 65 = (Q_0 - 65)\, e^{-\alpha t},$$

$$\alpha_1 = 0{,}0208, \qquad \alpha = 0{,}04784 \ (t \text{ en jours}),$$

$$30\,\alpha = 1{,}435 \ (t \text{ en mois})$$

pour les débits compris entre 600 et 60 mètres cubes, ce qui conduit au tableau de décroissance suivant :

Débit . . .	600	486	396	326	270	227	192	144	114	95	84	mcs
au bout du temps t =	0	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	jours

α a ici à peu près la même valeur que pour la Marne à La Chaussée (décrues normales de la saison froide).

Remarque II. *Décrues de la Seine à Paris* (*station du pont d'Austerlitz*) (2). — Le phénomène de la décrue est ici beaucoup plus complexe, et, si l'on veut faire des prévisions pendant la période de décroissance, le plus sûr sera, sans doute, d'appliquer *par extension* soit les formules de Belgrand et M. G. Lemoine, soit les récentes formules (inédites) données par M. Babinet et nous, où entrent les hauteurs ou les montées (3) à Bray, Chalifert (Marne), Melun et

(1) Fantoli, *loc. cit.*, p. 58.

(2) Plus haute crue connue depuis 1810, 6m,69 (1876). Les bas ports sont submergés à la cote 2m,64 ; les banquettes de halage à la cote 3m,76 ; c'est à peu près vers cette cote que cesse toute navigation. Le bassin versant est d'environ 46 320 kilomètres carrés.

(3) Habituellement on ne considère que des montées positives ; mais d'après quelques essais, et d'après la théorie mathématique, les mêmes formules doivent réussir souvent en prenant des montées positives ou négatives. Une fois le maximum atteint à la station où l'on fait les annonces, on introduit dans les formules de montées, pour les points où il y a baisse, les baisses au-dessous des maxima. Voir *Annu. Soc. Météor.*, 1904, novembre.

Paris-Austerlitz, ou encore les travaux de M. Allard. Mais l'on peut aussi chercher à opérer comme précédemment.

L'Yonne et ses affluents, rivières torrentielles, interviennent peu, quelquefois peut-être au début, dans le phénomène de la décrue à Paris. Cette décrue ne dure assez longtemps que grâce à l'influence de la Haute-Seine et de la Marne, qui la règlent. On ne pourra alors appliquer les procédés indiqués pour les stations précédemment considérées qu'à partir du moment où les maxima de ces deux cours d'eau auront fait sentir leur influence à Paris. En tenant compte des durées approximativement connues de propagation de ces maxima [1], on détermine la date à partir de laquelle la décrue peut être regardée comme suffisamment régulière.

Nous croyons inutile d'entrer dans le détail : il y a quelques irrégularités qui paraissent assez souvent susceptibles d'explication, et des prévisions semblent possibles à l'aide des graphiques.

Le graphique 9 des décrues de 4 en 4 jours montre que, pour $h_0 \leqslant 3^m,70$, alors que la Seine est à peu près dans son lit à Paris, on a approximativement

$$h = h_0 e^{-\alpha t},$$

avec le tableau suivant des valeurs de α :

	t en jours		t en mois
	α_1	α	α
Décrues normales de la saison froide . .	0,02	0,046	1,38
Décrues des périodes de froids	0,035	0,0805	2,415

Remarque III. — *Décrues de la Seine à Bezons* [2] (*aval de Paris*). — D'après les décrues des 6-26 janvier 1883, 17 février-3 mars 1897, 14-23 Décembre 1882, 10-28 février 1886, 20 février-3 mars 1881, 6-12 mars 1893, 13 mars-4 avril 1886, 19 mars-28 avril 1893, nous avons construit le graphique des décrues nor-

(1) Voir *Annu. Soc. Météor.*, 1904, novembre.

(2) Plus haut niveau depuis 1870, $6^m,92$ (1876) ; débordements à la cote $4^m,80$.

males de la saison froide à Bezons de 4 en 4 jours et de 8 en 8 jours. Quant h_0 (formule (13)) est $\leqslant 4^m,80$, cote des débordements à Bezons, on a, à peu près

$$h = h_0 e^{-\alpha t}, \qquad \alpha = 0{,}035 \text{ (chiffre provisoire)}.$$

REMARQUE IV. — *Décrues de la Marne au pertuis de Damery* [1] (*aval de La Chaussée*). — Les décrues à considérer sont à peu près les mêmes qu'à La Chaussée, à condition de retarder la date initiale d'un jour ou deux, suivant les cas. On obtient ici sensiblement 1° dans les saisons froides normales, pour

$$h_0 \leqslant 3^m,70, \; h - 0^m,55 = (h_0 - 0^m,55)\, e^{-\alpha t}, \qquad \alpha = 0{,}069\,;$$

2°, dans les saisons chaudes, pour

$$h_0 \leqslant 3^m,00, \; h - 0^m,50 = (h_0 - 0^m,50)\, e^{-\alpha t}, \qquad \alpha = 0{,}11\,;$$

toutefois pour la seule décrue d'août dont nous tenons compte, on a $\alpha = 0{,}16$: cette décrue s'est produite au moment le plus chaud de l'année 1879. Cette dernière circonstance, jointe à tous les résultats antérieurs, démontre d'une façon très nette que α est une fonction de la température T qui croît avec $|T|$, $|T|$ désignant la valeur absolue de T.

REMARQUE V. — *Sur les formules* (13) *et les lois de décroissance exponentielle.* — On peut voir, d'après les graphiques 10 et 11, que la forme exponentielle pour les stations hydrométriques étudiées dans ce mémoire, même quand on ne la considère qu'à peu près dans les limites où il n'y a pas débordement, ne représente parfois le phénomène qu'en moyenne et à une première approximation : pour les annonces de décrue, une courbe exacte ou une ligne brisée peut être préférable.

Mais les matières dont nous nous occupons ici n'intéressent pas seulement l'annonce des décrues : elles touchent à la fois à la géologie, à la géographie mathématique et physique (mécanique et physique du globe), à l'hydraulique mathématique, physique ou naturelle, et

(1) Les débordements commencent à la cote $3^m,00$ et deviennent importants à $3^m,70$. Un des plus hauts niveaux connus est celui du 31 décembre 1882 ($4^m,46$).

même à l'agronomie et à l'étude physique des matériaux de construction et des terres. Parmi l'un des nombreux points de vue où l'on peut envisager le phénomène de la décrue, on doit mentionner particulièrement celui de la comparaison entre diverses stations hydrométriques ou divers cours d'eau et de leur classification.

Un des procédés que l'on peut employer pour cette comparaison consiste à prendre pour chaque valeur de $t - t_0$ la valeur moyenne du rapport $\frac{h + C}{h_0 + C}$, C étant une constante convenablement choisie. Quand la loi est exponentielle, plus ce rapport est petit pour $t - t_0 = \tau$ donné, plus α est grand, plus la décroissance est rapide. Nos graphiques 10 montrent d'ailleurs que, quand la loi n'est pas exactement exponentielle, $\frac{h + C}{h_0 + C}$ ne varie pas énormément.

La valeur moyenne (géométrique) de ce rapport donne une mesure approchée de la rapidité de décroissance. A cette valeur moyenne correspond une valeur α' donnée par

$$\alpha'\tau = \log_e \left[\text{moy.} \frac{h_0 + C}{h + C}\right].$$

Cette valeur moyenne (arithmétique) α', quand (13) est exact, se confondra avec les valeurs moyennes obtenues en considérant les temps 2τ, 3τ,..... En effet, quand (13) a lieu, soient h_0, h_1, h_2,... des hauteurs successives de τ en τ jours déduites de la courbe $\tau = c^{te}$: par exemple, on a

$$\beta_1\tau = \log_e \frac{h_0 + C}{h_1 + C}, \quad \beta_2\tau = \log_e \frac{h_1 + C}{h_2 + C}, \quad \beta_3\tau = \log_e \frac{h_2 + C}{h_3 + C}.$$

Additionnant membre à membre,

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3} \cdot 3\tau = \log_e \frac{h_0 + C}{h_3 + C}.$$

Il en résulte de suite que la valeur moyenne α' correspondant à la courbe

$$t - t_0 = 3\tau$$

est précisément la même que celle correspondant à la courbe

$$t - t_0 = \tau.$$

Ceci posé, on est conduit, pour trouver la valeur moyenne de α', à mener précisément sur le plan des h, h_0, les droites passant par le point — C, — C et le moins loin possible en moyenne des points de la courbe

$$t - t_0 = \tau.$$

Le coëfficient angulaire de cette droite est la valeur de $e^{-\alpha'}$.

Ce procédé peut s'appliquer aussi aux sources, plus généralement à d'autres systèmes hydrauliques régis par une loi analogue à (13). Il aura l'avantage, par exemple, de permettre la comparaison de sources pour lesquelles les lois (13) ont des formes entièrement différentes. Il facilite encore la comparaison des sources et des rivières, et en donne une classification d'après les valeurs de α'. On peut aussi considérer dans la courbe (13) diverses régions pour chacune desquelles on déterminera une valeur de α', et tenir compte de l'amplitude des variations de α' dans la classification.

Ceci suffit à justifier la détermination de nos formules à type exponentiel, plus particulièrement des formules

$$0,6 + h = (0,6 + h_0)\, e^{-\alpha(t - t_0)}$$

pour la Marne à La Chaussée.

Ce n'est pas tout : ce type fournit d'une manière simple une image approchée du phénomène au point de vue quantitatif, et le *synthétise*. Enfin il est assez exact dans certains cas, et peut être précieux pour la mise en équation approchée du phénomène.

Bourg-la-Reine, 26 avril, 1904.

Supplément à la note (1), *p.* 205.

Quand on tient compte à la fois de l'égouttement du terrain et de la circulation souterraine, on est conduit à l'équation

$$\frac{1}{k}\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\chi}{\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

k et χ ayant le même sens que dans (21bis) p. 55, χ étant l'apport superficiel par unité de surface horizontale dans l'unité de temps.

Moyennant certaines hypothèses (terrain perméable spongieux avec nombreuses fissures verticales), on est conduit à l'équation complémentaire

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + k_1 \chi + k_1 A \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

(k_1, A ayant même sens que p. 204).

Pour les nappes dont le fond satisfait à $2c = \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}$, $c < 0$, il y a un régime où l'épaisseur ψ et χ, par suite le débit sur une verticale donnée, ne dépendent que du temps :

$$\psi = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, \qquad \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 > 0.$$

C'est le cas d'une nappe dont le fond est un cylindre parabolique convexe $z_0 = a + bx + cx^2$. Une pluie uniformément répartie peut ne changer seulement que les valeurs de C_1 et C_2. Sous certaines conditions, les sources suivent la même loi.

On peut encore trouver pour les nappes à fond horizontal une solution de la forme $z = \psi(t)\,\zeta(x,y)$.

Pour plus de détails voir *Bull. de la Soc. Math.*, 1904.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

MÉMOIRE ANNEXE

SUR LES COURBES DE DÉBIT DES SOURCES ET LES DÉCRUES DES RIVIÈRES

LISTE DES TABLEAUX NUMÉRIQUES (*ci-après*)

LISTE DES GRAPHIQUES (*ci-après*)

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE

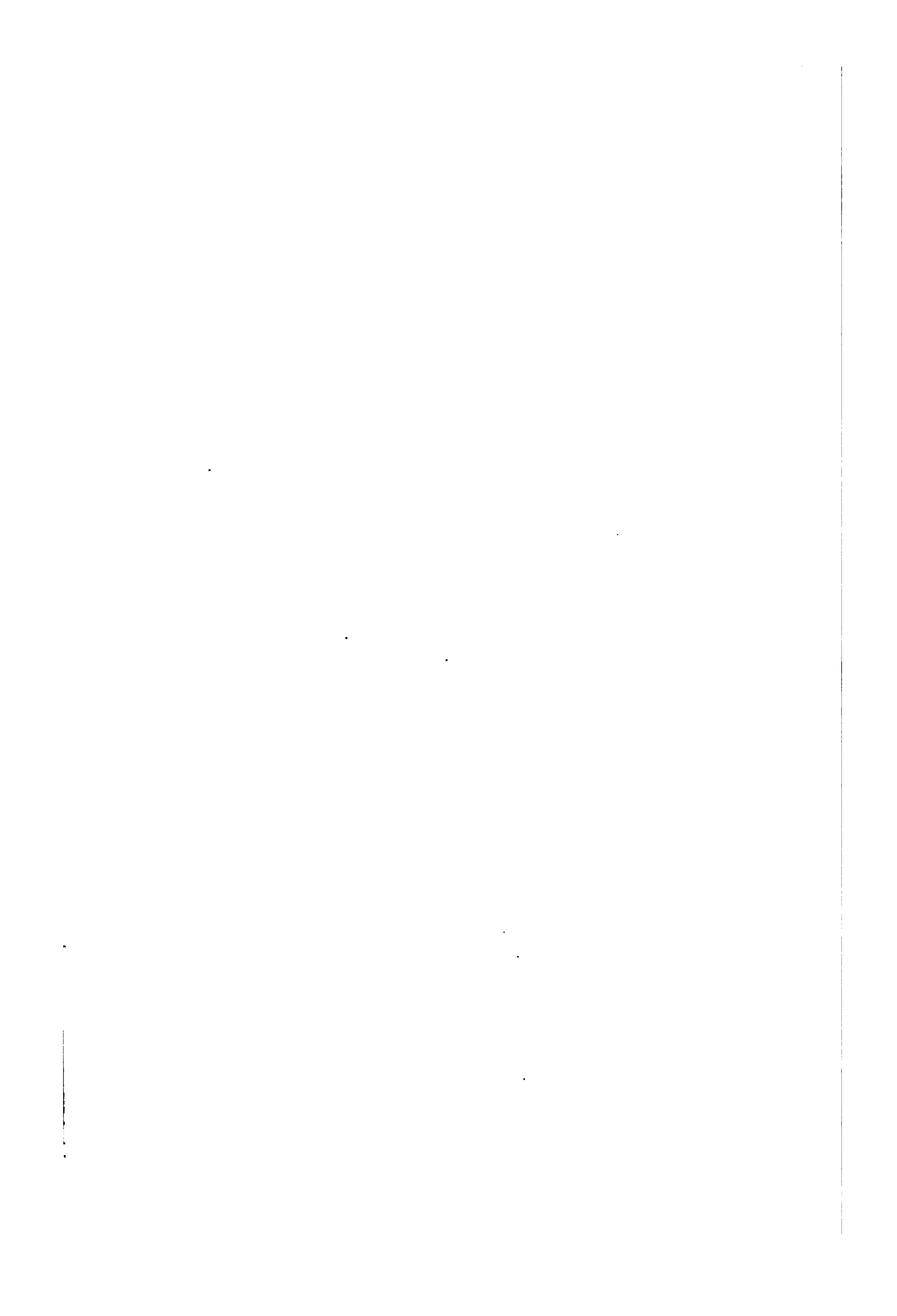


Tableau I.

Tarissements de la Somme à Sommesous (Marne)

Pluies de la Saison froide précédente		Pluies de la Saison chaude		Date des Tarissements	Date des Réapparitions	Observations
.	.	1887	285	27 Août 1887	19 Décemb. 1887	
1887-88	499	1888	417	1888 n'a pas tari	.	
1888-89	371	1889	345	id.	.	
1889-90	297	1890	318	7bre et 8bre 1890	Novembre 1890	
1890-91	265	1891	369	22 7bre 1891	fin Décemb. 1891	
1891-92	323	1892	439	14 Juillet 1892	2 Novemb. 1892	
1892-93	232	1893	324	5 Juillet 1893	21 Décemb. 1893	
1893-94	318	1894	333	21 Juillet 1894	20 Avril 1895	
1894-95	257	1895	343	28 Juin 1895	27 Décemb. 1895	
1895-96	317	1896	535	27 Juin 1896	19 Octobre 1896	
1896-97	410	1897	338	25 Novemb. 1897	15 Février 1898	
1897-98	240	1898	311	22 Août 1898	18 Janvier 1899	
1898-99	313	1899	310	20 Juin 1899	23 Janvier 1900	
1899-00	299	1900	248	2 Août 1900	29 Janvier 1901	
1900-01	380	1901	385	n'a pas	tari	
1901-02	267	1902				
Moyenne	319					

Nota — Nous négligeons les observations de 1886 à 1888 parce que les observations pluviométriques de 1887 à Sommesous ont été reconnues défectueuses.

Tableau II.

Tableau des pluies des saisons froides à Troyes et des dates des Débits de la Source de Cérilly (Vanne)

Années	Pluies à Troyes de la Saison froide		Débits minima		Numeros des Mois où ont eu lieu pour la première fois après le maximum les débits						Observations
	précédente	antéprécédente	de l'année précédente	de l'année	180 l.	160 l.	140 l.	120 l.	100 l.	80 l	
1890	160	256	175	127	3	4à7	9	»	»	»	
1895	161	214	76	64	»	»	4	6	7	9	
1884	184	295	154	99	5	6	8	9,5	11	»	
1898	204	278	144	100	5	7	8	9	12	»	
1894	214	246	96	76	4	5	6	7	8,5	10	
1902	234	346	123	142	8,5	10	11	»	»	»	
1887	237	299	164	144	9	10	12	»	»	»	
1900	238	250	104	84	5,5	6	7	8	10	11	
1891	239	160	127	115	3à8	9	10	11	»	»	
1893	246	261	103	96	6	7	8	9	11	»	
1899	250	204	100	104	7	6à8,5	4à9	10	12	»	
1889	256	285	159	175	11	»	»	»	»	»	
1892	261	239	115	103	5	6,5	7,5	9	10	»	
1897	278	303	89	144	10	11	13	»	»	»	
1888	285	237	144	159	9	10	»	»	»	»	
1886	299	308	145	164	9	10	»	»	»	»	
1896	303	161	64	89	5	6	7	7,5	8	9	
1885	308	184	99	145	7,5	8	9	»	»	»	
1901	346	238	84	123	7,5	7,5	8,5	11	»	»	

Tableau III.

Débits moyens mensuels de Cérilly depuis 1881 et totaux de pluie mensuels à Villeneuve l'Archevêque (alt. 110m)

Années		Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septem.	Octobr.	Novem.	Décemb.
1881	débits	233	262	269	264	271	251	213	179	156	143	141	130
	pluies	51	55	55	46	32	62	58	67	60	33	32	20
1882	d.	124	119	135	135	142	132	119	104	102	95	125	268
	p.	26	30	26	39	20	77	56	66	97	67	149	93
1883	d.	301	288	292	284	269	239	210	183	156	154	162	199
	p.	49	40	52	18	51	47	109	15	70	97	61	42
1884	d.	236	220	218	207	187	164	149	134	130	106	101	99
	p.	24	31	8	20	44	43	106	51	50	44	31	94
1885	d.	139	141	223	250	216	225	205	167	145	149	204	260
	p.	26	63	78	40	125	56	11	79	104	117	66	85
1886	d.	297	306	307	308	290	263	235	201	178	164	173	203
	p.	77	20	64	44	44	67	64	71	38	82	57	86
1887	d.	232	238	225	226	251	247	248	209	171	159	152	144
	p.	14	6	45	45	106	66	88	47	39	55	44	67
1888	d.	183	193	193	256	264	272	241	200	183	169	167	159
	p.	23	24	81	70	31	76	101	89	50	42	59	26
1889	d.	158	165	281	290	295	297	302	281	256	216	182	175
	p.	29	102	59	55	124	104	40	47	29	41	45	50
1890	d.	182	188	180	170	177	172	164	150	139	127	142	161
	p.	40	1	27	52	71	39	64	111	66	39	81	21
1891	d.	153	203	187	227	229	234	207	181	168	137	118	115
	p.	43	4	70	41	91	71	86	61	34	39	48	89
1892	d.	166	183	245	234	182	173	149	134	115	103	184	192
	p.	32	100	50	15	14	56	122	23	30	195	54	59
1893	d.	217	220	237	235	227	177	151	133	120	110	99	96
	p.	50	76	13	0	69	22	85	11	65	64	58	50
1894	d.	110	160	185	185	165	145	117	107	86	82	80	76
	p.	51	54	35	49	36	69	70	72	58	35	29	44
1895	d.	81	101	108	143	139	119	107	88	79	76	64	82
	p.	45	11	47	30	47	71	48	48	0	63	80	78
1896	d.	134	129	124	220	179	154	127	105	89	95	255	256
	p.	20	5	74	24	0	65	58	41	96	163	24	73
1897	d.	270	276	277	275	273	271	267	228	199	169	162	146
	p.	30	61	62	56	29	59	29	105	72	6	16	51
1898	d.	144	153	194	191	175	183	155	142	122	110	111	100
	p.	4	79	41	25	93	50	13	40	19	83	28	39
1899	d.	112	145	146	137	139	154	173	171	135	116	106	104
	p.	88	17	27	57	57	92	88	49	47	78	11	55
1900	d.	124	226	264	244	192	160	146	116	108	97	84	85
	p.	103	68	8	16	62	36	95	41	12	31	82	64
1901	d.	85	104	171	256	261	238	227	150	131	145	124	123
	p.	49	46	86	86	15	26	96	14	102	83	18	
1902	d	188	209	231	233	227	256	224	207	172	163	142	
	p.												
Moyennes 1881-1900	d.	179	195	214	224	213	202	184	161	142	128	141	152
	p.	41	42	46	37	57	61	69	57	52	69	53	59

Tableau IV.

Tableau des débits maxima de Cérilly et de leurs dates

Années	Débits
1881	269 l. Mars , 271 Mai
1882	135 Mars-Avril , 142 Mai
1883	301 Janvier , 284 Avril
1884	236 Janvier , 207 Avril
1885	250 Avril , 225 Juin
1886	306-308 Février-Avril
1887	238 Février , 251 Mai
1888	256 Avril , 272 Mai
1889	281 Avril , 302 Juillet
1890	188 Février , 177 Mai
1891	203 Février , 227 Avril , 234 Juin
1892	245 Mars , 234 Avril
1893	237 Mars , 227 Mai
1894	185 Mars-Avril ,
1895	143 Avril , 139 Mai
1896	220 Avril , 179 Mai
1897	270 Janvier , 277 Mars , 273 Mai
1898	194 Mars , 183 Juin
1899	146 Mars , 173 Juillet
1900	264 Mars , 244 Avril
1901	256-261 Avril-Mai , 227 Juillet
1902	231 Mars , 256 Juin

Tableau V.

Décroissance mensuelle de la Source de Cérilly (Vanne) pour les débits ≤ 180 l.

Années	Débit initial et Date		Décroissance
1884	187 l.	Mai	23 l, 15 ▯, 15, 4, 24, 5, 2.
1885	205	Juillet	38, 22 ▯.
1886	201	Août	23, 14 ▯.
1887	209	Août	38, 12 ▯, 7, 8.
1888	200	Août	17, 14, 2, 8 ▯, 1.
1889	182	Novemb.	7 ▯.
1890	180	Mars	10, -7, 5, 8, 14 ▯, 11, 12.
1891	181	Août	13, 31, ▯ 19, 3.
1892	182	Mai	9, 24 ▯, 15, 19, 12.
1893	177	Juin	26 ▯, 18, 13, 10, 11, 3.
1894	185	Avril	20, 20, ▯ 28, 10, 21, 4, 2, 4.
1895	143	Avril	4, 20, 12, 19, 9, 3, 12.
1896	179	Mai	25 ▯, 27, 22, 16.
1897	199	Septemb.	30, 7, 16 ▯, 2.
1898	183	Juin	28 ▯, 13, 20, 12, -1, 11.
1899	173	Juillet	2, 36 ▯, 19, 10, 2.
1900	192	Mai	32, ▯ 14, 30, 8, 11, 13.

N. – Le signe ▯ précède les décroissances qui sont relatives à des débits ≤ 160 l.

Tableau VI.

Indiquant la sécheresse et l'humidité des saisons froides à Troyes

Années	Pluies de la Saison froide précédente	Ecart de la moyenne	Débits minima de Cérilly	Dates de ce Débit
1883	295	+ 45	154	Octobre
1884	184	− 66	99	Décembre
1885	308	+ 58	145	Septembre
1886	299	+ 49	164	Octobre
1887	237	− 13	144	Décembre
1888	285	+ 35	158	Janvier 1889
1889	256	+ 6	175	Décembre
1890	160	− 90	127	Octobre
1891	239	− 11	115	Décembre
1892	261	+ 11	103	Octobre
1893	246	− 4	96	Décembre
1894	214	− 36	76	Décembre
1895	161	− 89	64	Novembre
1896	303	53	89	Septembre
1897	278	28	144	Janvier 1898
1898	204	− 46	100	Décembre
1899	250	0	104	Décembre
1900	238	− 12	84	Novembre
1901	346	96	123	Décembre
1902	234	− 16	142	Novembre
Moyenne	250	Moyenne des valeurs absolues 38		

Tableau VII

Baisse mensuelle du débit de Cérilly dans la saison chaude (par rapport au mois précédent)

Années	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septemb.	Octobre	Novemb.
1881	5	-7	20	38	34	23	13	2
1882	0	-7	10	13	15	2	7	-30
1883	8	15	30	29	27	27	2	-8
1884	11	20	23	15	15	4	24	5
1885	-27	34	-9	20	38	22	-4	-55
1886	-1	18	27	28	34	23	14	-9
1887	-1	-25	4	-1	39	38	12	7
1888	-63	-8	-8	31	41	17	14	2
1889	-9	-5	-2	-5	21	25	40	34
1890	10	-7	5	8	14	11	12	-15
1891	-40	-2	-5	27	26	13	31	19
1892	11	52	9	24	15	19	12	-81
1893	2	8	50	26	18	13	10	11
1894	0	20	20	28	10	21	4	2
1895	-35	4	20	12	19	9	3	12
1896	-96	41	25	27	22	16	-6	-160
1897	2	2	2	4	39	29	30	7
1898	3	16	-8	28	13	20	12	-1
1899	9	-2	-15	-19	2	36	19	10
1900	20	52	32	14	30	8	11	13
Moyenne	-10	+11	+11,5	+17	+24	+19	+13	-12

Tableau VIII

Débit moyen mensuel de Cérilly depuis Mai, Juin ou Juillet dans la saison chaude.

Années	Plus fort débit de Mai, Juin ou Juillet	Débit des Mois suivants									Observations
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1889	302 (7)	281	256	216	182	175	"	"	"	"	
1886	290 (5)	263	235	201	178	164	"	"	"	"	
1897	273 (5)	271	267	228	199	169	162	146	144	"	
1888	272 (6)	241	200	183	169	167	159	158	"	"	
1881	271 (5)	251	213	179	156	143	141	130	124	119	
1883	269 (5)	239	210	183	156	154	"	"	"	"	
1887	248 (7)	209	171	159	152	144	"	"	"	"	
1891	234 (6)	207	181	168	137	118	115	"	"	"	
1893	227 (5)	177	151	133	120	110	99	96	"	"	
1885	225 (6)	205	167	145	"	"	"	"	"	"	
1884	187 (5)	164	149	134	130	106	101	99	"	"	
1898	183 (6)	155	142	122	110	111	100	"	"	"	
1892	182 (5)	173	149	134	115	103	"	"	"	"	
1896	179 (5)	154	127	105	89	"	"	"	"	"	
1890	177 (5)	172	164	150	139	127	"	"	"	"	année anormale à négliger
1899	173 (7)	171	135	116	106	104	"	"	"	"	
1894	165 (5)	145	117	107	86	82	80	76	"	"	
1900	160 (6)	146	116	108	97	84	"	"	"	"	
1882	142 (5)	132	119	104	102	95	"	"	"	"	
1895	139 (5)	119	107	88	79	76	64	"	"	"	

Tableau VIII bis.

Moyenne des débits en litres par seconde de Cérilly (Vanne) pendant le 1er Semestre en fonction des hauteurs de pluie de la saison froide à Troyes et du débit minimum précédent.

Années	Pluies à Troyes	Débit moyen	Débit minimum précédent	Observations
1890	160	178	175	
1895	161	115	76	
1884	184	205	154	
1898	204	173	144	
1894	214	158	96	
1902	234	223	123	
1887	237	236	164	
1900	238	202	104	A la fin de 1896, le débit minimum 89 ne correspondait pas à l'état réel de la nappe (S.VIII.)
1891	239	205	127	
1893	246	219	103	
1899	250	139	100	
1889	256	248	159	
1892	261	197	115	
1897	278	274	89	
1888	285	227	144	
1886	299	295	145	
1896	303	157	64	
1885	308	199	99	
1901	346	186	84	

Tableau IX

Débits moyens mensuels en litres par seconde d'Armentières et Drains

Années	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septemb.	Octobre	Novemb.	Décemb.
1886	.	"	.	.	.	.	.	.	.	411	426	470
1887	664	628	555	567	622	616	561	509	437	365	362	413
1888	464	486	476	684	633	632	565	514	442	440	434	406
1889	404	502	725	895	937	945	866	644	583	505	425	400
1890	438	480	404	405	378	362	378	391	380	348	397	460
1891	398	606	467	452	605	567	543	497	430	387	364	360
1892	454	557	761	665	584	497	451	421	344	333	508	599
1893	550	596	791	629	601	504	466	435	352	313	307	302
1894	322	459	480	469	413	353	376	334	308	289	267	253
1895	269	264	307	363	367	331	323	305	258	257	256	279
1896	491	502	492	500	450	386	383	349	326	338	726	606
1897	756	837	1021	934	897	811	690	571	516	461	420	378
1898	391	438	497	533	466	539	494	408	362	306	309	291
1899	320	380	396	370	383	399	508	453	384	361	344	328
1900	357	626	589	526	538	465	423	395	387	312	279	298
1901	290	369	473	674	665	582	469	442	373	370	358	344
1902	453	508	531	507	492	632	578	480	429	391	383	374
1903	540	508	514	.	"	.						

Tableau IX bis.

Années	Cérilly — Débits voisins de 160 l. et dates	Armentières — Débits correspondants
1886	164 Octobre	411
1887	159 id.	365
1888	159 Décembre, 158 Janv. 89	406 , 404
1889	175 Décembre	400
1890	164 Juillet , 150 Août	378 , 391
1891	168 Septembre, 137 Octobre	430 , 387
1892	173 Juin , 149 Juillet	497 , 451
1893	177 Juin , 151 Juillet	504 , 466
1894	165 Mai , 145 Juin	413 , 353
1895	Néant	
1896	179 Mai , 154 Juin	450 , 386
1897	162 Novembre, 146 Décemb.	420 , 378
1898	183 Juin , 155 Juillet	539 , 494
1899	171 Août , 135 Septemb.	453 , 384
1900	160 Juin , 146 Juillet	465 , 423
1901	150 Août	442
1902	163 Octobre , 142 Novemb.	391 , 383

Tableau X.

Armentières et Drains

Années	Plus fort débit de Mai à Août et Date	Débits des Mois suivants						
1889	945 (6)	866	644	583	505	425	400	.
1897	897 (5)	811	690	571	516	461	420	378
1901	665 (5)	582	469	442	373	370	358	344
1888	632 (6)	565	514	442	440	434	406	404
1902	632 (6)	578	480	429	391	383	374	.
1887	616 (6)	561	509	437	365	362	.	.
1891	605 (5)	567	543	497	430	387	364	360
1893	601 (5)	504	466	435	352	313	307	302
1892	584 (5)	497	451	421	344	333	.	.
1898	539 (6)	494	408	362	306	309	291	.
1900	538 (5)	465	423	395	387	312	279	.
1899	508 (7)	453	384	361	344	328	.	.
1896	450 (7)	386	383	349	326	.	.	.
1894	418 (5)	353	376	334	308	289	267	253
1890	391 (8)	380	348	.	.	.	.	.
1895	367 (5)	331	323	305	258	257	256	.

Tableau XI.

Débits moyens mensuels en litres par seconde des Sources de la Dhuis depuis 1884.

Années	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septem.	Octobr.	Novem.	Décemb.
1884	,	,	,	,	,	,	,	219	208	205	197	244
1885	232	256	253	235	222	215	212	201	197	215	225	259
1886	279	294	276	259	244	241	232	225	222	219	235	265
1887	262	247	241	256	247	238	229	222	212	205	205	222
1888	222	238	268	262	241	232	219	212	201	201	201	209
1889	205	241	253	256	244	241	225	219	215	208	205	219
1890	238	244	232	229	225	219	215	205	201	197	235	219
1891	219	241	247	250	247	250	231	219	205	197	197	222
1892	253	279	281	271	250	241	225	215	212	212	222	241
1893	222	262	265	235	219	212	205	201	197	201	215	229
1894	241	273	271	244	229	219	212	205	201	197	197	212
1895	241	222	219	219	212	208	201	189	185	181	177	197
1896	208	193	238	222	205	193	189	189	197	273	279	273
1897	268	294	289	292	262	241	232	219	212	208	197	197
1898	193	229	238	232	244	235	219	212	201	193	185	173
1899	229	212	197	181	201	205	197	193	189	189	181	177
1900	193	229	229	219	208	197	189	185	185	177	177	181
1901	181	189	222	238	219	205	197	189	181	177	177	181
1902	197	205	201	201	205	222	205	197	189			

Tableau XII

Pluies des saisons froides à Montmort et dates du débit 220 l. pour la Dhuis

Années	Pluies des Saisons froides		Date du Débit 220 l.	Pluies de la saison chaude de l'année précédente
	précédentes	antéprécédentes		
1898	190	411	7e Mois	427
1895	238	340	2,5e "	323
1893	285	386	5e "	353
1890	290	333	6e "	391
1891	327	290	8e "	372
1902	329	463	6e "	274
1889	333	412	8e "	376
1894	340	285	6e "	394
1885	353	"	5e "	345
1887	355	356	8e "	417
1886	356	353	9e "	528
1899	361	190	1,5e "	311
1892	386	327	7,5e "	494
1900	405	361	4e "	314
1897	411	435	8e "	527
1888	412	355	7e "	345
1896	435	238	4e "	299
1901	463	405	5e "	222

Tableau XIII

Débit moyen mensuel de la Dhuis depuis Mai ou Juin dans la saison chaude.

Années	Plus fort débit de Mai ou Juin		Débits des Mois suivants						
1897	262	(5)	241	232	219	212	208	197	″
1892	250	(5)	241	225	215	212	212	″	″
1891	250	(6)	231	219	205	197	197	″	″
1887	247	(5)	238	229	222	212	205	205	″
1886	244	(5)	241	232	225	222	219	″	″
1889	244	(5)	241	225	219	215	208	205	″
1898	244	(5)	235	219	212	201	193	185	173
1888	241	(5)	232	219	212	201	201	201	″
1894	229	(5)	219	212	205	201	197	197	″
1890	225	(5)	219	215	205	201	197	″	″
1885	222	(5)	215	212	201	197	″	″	″
1902	222	(6)	205	197	189	?	?	?	?
1893	219	(5)	212	205	201	197	″	″	″
1901	219	(5)	205	197	189	181	177	177	″
1895	212	(5)	208	201	189	185	181	177	″
1900	208	(5)	197	189	185	185	177	177	″
1896	205	(5)	193	189	189	″	″	″	″
1899	205	(6)	197	193	189	189	181	177	″

Tableau XIV

Niveaux de la Marne à la Chaussée et pluies à Chaumont et Bar-le-Duc.

Années	Chaumont (plateau)		Bar-le-Duc		Cotes minima et leurs dates à la Chaussée	Date à laquelle la cote 0,34 a été réalisée pour la 1ère fois	Total de 4 Années précédentes
	Saison froide précédente	Saison chaude	Saison froide précédente	Saison chaude			
1880	348	605	400	550	-0,35 18 Sept.	18 Septembre	
1881	495	401	559	406	-0,56 6 Sept.	22 Juillet	
1882	222	479	290	552	-0,50 11 Sept.	5 Septembre	
1883	588	516	622	553	-0,37 18 Sept.	15 Septembre	1653
1884	364	405	366	420	-0,72 20 Août	16 Juillet	1669
1885	533	535	506	591	-0,64 20 Août	25 Juillet	1707
1886	426	426	469	536	-0,54 6 Octobre	18 Août	1911
1887	342	404	399	496	-0,64 5 Octobre	3 Août	1665
1888	458	445	553	522	-0,34 29 Septemb.	29 Septembre	1759
1889	470	436	421	539	-0,59 19 Août	2 Août	1696
1890	283	554	374	649	-0,45 20 Sept.	15 Septembre	1553
1891	268	518	363	491	-0,58 20 Sept.	17 Août	1479
1892	376	433	401	508	-0,73 6 Sept.	29 Mai	1397
1893	293	383	356	412	-0,92 12 Juillet -0,90 17 Sept.	29 Avril	1220
1894	318	381	431	443	-0,68 7 Août	12 Mai	1255
1895	412	401	320	398	-0,78 1er Octobre	10 Juillet	1399
1896	525	541	477	540	-0,70 31 Août	27 Mai	1548
1897	392	445	459	415	-0,55 23 Novemb.	29 Juin	1647
1898	312	440	294	390	-0,78 6 Octobre	12 Juillet	1641
1899	424	476	426	414	-0,63 27 Sept.	5 Août	1653
1900	351	319	434	314	-0,82 2 Octobre	30 Mai	1479
1901	474	641	513	522	-0,76 24 Juillet	8 Juin	1561
1902	416		896		-0,73 5 Septemb.	15 Juillet	1665
Moyennes	390	463	431	484			

Tableau XV.

Marne à la Chaussée

Années	T	Niveau minimum	Date du niveau minimum	Date où la cote −0,34 a été réalisée pour la 1ère fois	Saisons chaudes à Bar-le-Duc	
1 1893	1220	− 92	12 Juillet	29 Avril	412	
2 1894	1255	− 68	7 Août	12 Mai	443	
3 1892	1397	− 73	6 Septembre	29 Mai	508	
4 1895	1399	− 78	1er Octobre	10 Juillet	398	
5 1900	1479	− 82	2 Octobre	30 Mai	314	
6 1891	1479	− 58	20 Septembre	17 Août	491	
7 1896	1548	− 70	31 Août	27 Mai	540	
8 1890	1553	− 45	20 Septembre	15 Septembre	649	Crues en Juillet Août, Octobre
9 1901	1561	− 76	24 Juillet	8 Juillet	522	
10 1898	1641	− 78	6 Octobre	12 Juillet	390	
11 1897	1647	− 55	23 Novembre	29 Juin	415	
12 1899	1653	− 63	27 Septembre	5 Août	414	
13 1883	1653	− 37	18 Septembre	15 Septembre	553	Crues en Juin Juillet, Octobre
14 1887	1665	− 64	5 Octobre	3 Août	496	
15 1902	1665	− 74	1er Octobre	15 Juillet	302	
16 1884	1669	− 72	20 Août	16 Juillet	420	
17 1889	1696	− 59	19 Août	2 Août	539	
18 1885	1707	− 64	20 Août	25 Juillet	591	
19 1888	1759	− 34	29 Septembre	29 Septembre	522	Crues en Juillet Août, Octobre
20 1886	1911	− 54	6 Octobre	18 Août	536	
Moyenne		−0,65				

Tableau XVI (1)

Marne à la Chaussée

Années		T	Niveau minimum	N° de classem.t de l'année au Tableau XV	Saison chaude à Bar-le-Duc
1	1894	933	− 68	2	443
2	1893	944	− 92	1	412
3	1891	1015	− 58	6	491
4	1892	1020	− 73	3	508
5	1895	1064	− 78	4	398
6	1900	1127	− 82	5	314
7	1890	1153	− 45	8	649
8	1898	1172	− 78	10	390
9	1901	1193	− 76	9	522
10	1899	1194	− 63	12	414
11	1887	1216	− 64	14	496
12	1883	1231	− 37	13	553
13	1896	1242	− 70	7	540
14	1902	1277	− 74	15	302
15	1888	1279	− 34	19	522
16	1897	1282	− 55	11	415
17	1885	1302	− 64	18	591
18	1884	1310	− 72	16	420
19	1889	1312	− 59	17	539
20	1886	1435	− 54	20	536

(1) Les chiffres soulignés montrent nettement l'influence des saisons chaudes pluvieuses

Tableau XVII

Pluies à Chanceaux, St. Seine et Laignes et tarissements maxima de la Laignes.

Années	Chanceaux		St. Seine		Laignes		Maxima des tarissements moyens mensuels	Dates du Mois
	Saison froide précédente	Saison chaude	Saison froide précédente	Saison chaude	Saison froide précédente	Saison chaude		
1880	339	738	327	814	256	530	600	Juill.-Septbre
1881	473	476	465	369	?	342	−1500	Août
1882	242	664	227	709	171	511	−100	Juin
1883	575	461	524	436	474	382	−2900	Septembre
1884	363	505	306	497	274	375	−4200	Août
1885	475	569	458	643	426	426	−4100	Août-Septbre
1886	424	457	392	414	373	429	− 100	Mai
1887	388	488	381	514	293	395	−4000	Août
1888	597	379	528	485	?	456	500	Juin
1889	331	362	410	401	379	481	−2060	Septembre
1890	389	533	303	562	?	442	2060	Mai
1891	381	675	337	472	244	414	− 390	Septembre
1892	600	506	428	466	336	411	−3530	Juin
1893	271	459	306	341	301	310	−8350	Septembre
1894	372	400	301	396	255	363	−5280	Septembre
1895	402	458	370	476	346	403	−3702	Octobre
1896	449	584	513	617	426	569	−4876	Août
1897	417	411	497	449	402	390	740	Octobre
1898	109	352	301	342	240	328	−5566	Octobre
1899	254	471	465	438	329	430	−4963	Septembre
1900	257	402	404	391	316	358	−5500	Août
1901	512	651	558	483	371	402	−5500	Août
1902								

Tableau XVIII

Tarissements de la Laignes

Années	Chanceaux		Laignes		Maximum de Tarissement	Date
	Saison froide précédente	Saison chaude	Saison froide précédente	Saison chaude		
1898	109	352	240	328	− 5566	Octobre
1882	242	664	171	511	− 100	Juin
1899	254	471	329	430	− 4963	Septembre
1900	257	402	316	358	− 5500	Août
1893	271	459	301	310	− 8350	Septembre
1889	331	362	379	481	− 2060	Septembre
1880	339	738	256	530	600	Juillet-Septembre
1884	363	505	274	375	− 4200	Août
1894	372	400	255	363	− 5280	Septembre
1891	381	675	244	414	− 390	Septembre
1887	388	488	293	395	− 4000	Août
1890	389	533	?	442	+ 2060	Mai
1895	402	458	346	403	− 3702	Octobre
1897	417	411	402	390	+ 740	Octobre
1886	424	457	373	429	− 100	Mai
1896	449	584	426	569	− 4876	Août
1881	473	476	?	342	− 1500	Août
1885	475	569	426	426	− 4100	Août-Septembre
1901	512	651	371	402	− 5500	Août
1883	575	461	474	382	− 2900	Septembre
1888	597	379	?	456	500	Juin
1892	600	506	336	411	− 3530	Juin

Tableau XIX

Tarissements de la Laignes

Années	Chanceaux						Pluies à Chanceaux en						Nombre de Mois au-dessous de 60 d'Avril à Août
	Saison froide précédte	Saison antéprécédte	Saison chaude	Saison chaude précédte	Maxima (1)	Dates	Avril	Mai	Juin	Juill.	Août	Septbre	
1890	389	331	533	362	+2060	Mai	98	168	58	98	58	52	0
1886	424	475	457	569	-100	Mai	inconnues						
1882	242	473	664	476	-100	Juin	78	26	193	121	72	140	1
1892	600	381	506	675	-3530	Juin	38	11	73	111	46	69	3
1888	597	388	379	488	+500	Juin	44	43	59	123	60	27	2
1880	339	563	738	518	600	Juill.-7bre	101	31	172	62	155	103	1
1901	512	257	651	402	-5500	Août	165	47	78	49	46	315	3
1881	473	339	476	738	-1500	Août	111	47	79	57	82	107	1
1885	475	363	569	505	-4100	Août-7bre	79	99	111	24	52	91	1
1896	449	402	584	458	-4876	Août	29	12	118	66	43	158	3
1887	388	424	488	457	-4000	Août	35	130	32	116	57	58	2
1884	363	575	505	461	-4200	Août	26	110	48	117	87	110	2
1900	257	254	402	471	-5500	Août	30	40	12	87	118	90	3
1891	381	389	675	533	- 390	Septembre	66	157	156	85	70	46	0
1883	575	242	461	664	-2900	Septembre	39	51	75	113	24	105	2
1894	372	271	400	459	-5280	Septembre	42	47	94	93	31	57	3
1899	254	109	471	352	-4963	Septembre	29	51	128	133	30	82	2
1893	271	600	459	506	-8350	Septembre	0	24	40	81	18	68	4
1889	331	597	362	379	-2060	Septembre	25	14	125	62	42	59	3
1895	402	372	458	400	-3702	Octobre	51	71	223	91	49	2	1
1898	109?	417	352	411	-5566	Octobre	19	92	59	24	87	18	2
1897	417	449	411	584	- 200	Octobre	103	46	87	92	100	61	1

(1) Il faut les prendre dans les résumés du service hydrométrique à partir de celui de 1890, certains résultats publiés antérieurement étant inexacts. Comp. résumé de 1890, p. 27.

Tableau XX

Influence des pluies d'été (Avril-Août) sur les Tarissements de la Laignes.

Années	Nombre de Mois où l'on a eu moins de 50% à Chanceaux	Tarissements Maximum
1890	0	+ 2060
1891		− 390
1880	1	600
1882		−100
1897		− 200
1881		−1500
1895		−3702
1885		−4100
1888	2	+ 500
1883		− 2900
1887		− 4.000
1884		− 4200
1899		− 4963
1898		− 5566
1889	3	− 2060
1892		− 3520
1896		− 4876
1894		− 5280
1900		− 5500
1901		− 5500
1893	4	− 8350

Tableau XXI

Débits moyens journaliers des Sources de Bellefontaine (Havre)

Années	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septbre	Octobre	Novbre	Décbre
1882	1425	1350	1250	1200	1125	1100	1175	1075	1.000	975	925	1250
1883	1500	1700	1725	1825	2000	2100	2050	2000	1850	1900	1850	1800
1884	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1450	1400	1350	1300	1175
1885	1175	1100	1200	1050	1000	1000	975	975	950	900	1000	1050
1886	1075	1150	1200	1275	1300	1375	1400	1300	1250	1200	1200	1300
1887	1300	1350	1400	1400	1375	1350	1300	1250	1150	1100	1050	1000
1888	1000	975	900	950	975	975	950	975	975	975	925	900
1889	900	975	975	975	1000	975	1000	1000	1000	950	900	900
1890	1000	900	900	900	900	925	950	900	900	900	900	900
1891	900	900	900	900	900	875	850	825	800	825	850	850
1892	875	900	925	875	900	900	875	850	900	875	875	875
1893	925	925	900	900	875	900	900	900	900	900	875	900
1894	925	1000	1000	1025	1000	975	1000	1025	1000	1000	1000	1025
1895	1025	1050	1175	1100	1100	1100	1075	1075	1075	1050	1000	975
1896	950	960	875	875	850	800	800	775	800	825	1025	1225
1897	1300	1550	2000	2600	2800	2600	2550	2400	2150	2000	1875	1700
1898	1650	1500	1350	1300	1300	1325	1125	1100	1025	1000	1000	975
1899	1000	975	975	1025	1000	1000	1000	975	1000	1000	1000	1000
1900	975	975	1000	975	925	900	900	875	850	825	800	800
1901	825	850	875	900	925	950	1000	1000	900	900	900	850

Débits moyens journaliers des Sources de St. Laurent (Havre

Années	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septbre	Octobre	Novbre	Décbre
1882	28800	27300	25900	25100	24150	23300	22750	22400	21300	20200	20400	″
1883	21900	″	″	″	″	″	″	″	″	″	28950	″
1884	″	″	″	″	″	″	31200	″	″	″	″	27225
1885	27125	26400	25400	24500	23600	22500	20850	20.000	18700	20700	21000	21500
1886	21200	20900	21200	21600	22000	22500	23000	23700	24400	24400	24400	24300
1887	24200	24900	27600	27700	28400	29000	29000	26400	25000	24500	24100	23200
1888	22200	21000	20800	20450	19300	18400	17300	16600	16800	17000	17000	17750
1889	17800	18000	18050	19800	19400	19000	18800	18400	18000	18500	19050	20050
1890	20500	20800	20900	21000	20600	20500	20400	20200	19950	20300	20700	21200
1891	21600	22200	20600	20300	19750	19600	19400	19400	18400	17950	17000	18000
1892	19800	19925	19200	19750	19600	19600	19575	19400	19600	19800	19800	19800
1893	19950	20300	21600	19950	19600	19050	19400	19700	20150	20600	21050	19800
1894	19600	20000	20200	19000	18800	18300	18500	19400	19000	19600	20200	19200
1895	19950	19600	21000	21300	22000	22900	23000	24000	23900	24400	24200	23700
1896	23550	22400	21900	20800	19750	19300	18900	17500	17600	18800	19250	19200
1897	19100	25000	27000	27800	31000	33250	35700	40000	38000	37600	37200	35800
1898	33100	32700	31800	29500	28700	27000	26975	24900	24400	23700	23000	20.000
1899	21300	21000	21000	21000	19800	19000	18350	17950	17950	17100	16300	16000
1900	15400	16900	16400	16350	15450	15400	14400	13650	13550	13700	13850	13800
1901	13750	14000	13850	14000	13800	14000	14300	14500	14450	15100	15700	15450

Tableau XXII

Pluies des Saisons froides et chaudes à Fatouville et au Hâvre (Sanvic)

Années		1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897	1898	1899	1900	1901	1902
Le Hâvre (Sanvic)	Saison froide précédente	367	340	561	393	423	454	565	517	393	429	372	375	267	587	603	[illegible]	460	228	396	363	442	341
	Saison chaude	357	735	547	285	535	491	328	377	514	404	484	479	417	706	355	536	370	354	337	258	171	
Fatouville (Phare)	Saison froide précédente	300	353	547	414	424	374	368	512	307	383	333	348	297	438	344	379	505	260	392	375	470	318
	Saison chaude	387	475	500	363	442	446	313	372	479	454	565	375	287	567	332	624	452	357	329	319	236	393

Moyennes
- Le Hâvre (Sanvic), Saisons froides 413, Saisons chaudes 435;
- Fatouville (Phare), Saisons froides 387, Saisons chaudes 429 (1859-98)

Tableau XXIII

Pluies des Saisons chaudes et grandes crues de la Saison froide suivante à Paris (Austerlitz) et Mantes

Années	Totaux des Saisons chaudes (Moyenne géométrique du bassin de la Seine) par ordre croissant depuis 1874	Saisons froides suivantes	Hauteur maxima de la Saison froide suivante		Observations
			Paris (Austerlitz)	Mantes	
1900	272	387	3.m 80	4.m 75	
1874	295	301	3. 30	4. 86	
1893	318	310	2. 50	3. 98	La moyenne des
1876	323	438	4. 30	6. 01	Saisons froides
1884	324	348	4. 20	5. 62	précédentes et suivantes
1895	327	330	4. 40	5. 71	est ici de
1898	334	326	3. 10	4. 47	312 et 320 m/m
1899	341	321	3. 70	5. 05	celle des Saisons
1897	349	246	2. 50	3. 81	chaudes
1887	352	376	4. 00	5. 84	335 m/m
1881	353	218	0. 90	2. 35	
1894	364	267	3. 10	4. 52	
1877	365	356	3. 60	5. 07	
1889	369	255	2. 20	3. 81	
1888	389	319	5. 78	6. 84	
1892	396	263	3. 80	5. 35	
1890	398	275	2. 80	4. 22	La moyenne
1879	400	229	5. 60	7. 29	des Saisons froides
1891	407	328	4. 10	5. 50	précédentes et suivantes
1883	430	303	3. 10	5. 00	est ici de
1885	440	367	5. 60	6. 70	325 et 334 m/m
1875	450	372	6. 69	7. 69	celle des Saisons
1886	452	289	3. 60	5. 22	chaudes
1882	454	432	6. 24	7. 60	436 m/m
1880	460	369	5. 00	6. 42	
1896	497	387	5. 60	6. 90	
1878	499	407	5. 64	6. 93	
Moyenne	378				

Tableau XXIV

Crues de la Haute-Seine à Bray

Années	à Troyes (par ordre croissant)	à Chanceaux	Plus hauts niveaux de la saison froide suivante à Bray sur la Haute-Seine	
1889	255	362	1, 28	
1898	274	352	2, 35	
1894	276	400	2, 45	
1884	290	505	2, 76	
1883	306	461	2, 42	
1895	307	458	2, 90	
1900	308	402	2, 33	
1893	309	459	1, 77	
1897	314	411	2, 13	
1882	321	664	2, 91	
1881	337	476	0, 90	
1887	348	488	2, 56	
1892	366	506	2, 64	
1886	367	457	2, 70	
1888	400	379	2, 89	
1891	420	675	2, 70	
1890	431	533	2, 07	
1885	436	569	2, 88	
1896	464	584	2, 87	
1899	474	471	2, 52	
Moyenne de 20 ans	339	485 (1881-1900)		

Tableau XXV

Débits de l'ensemble des sources de la Vanne, captées pour Paris, dans la période de régime propre (saison chaude)

Années	Débit maximum	Mois de ce Débit	Débits moyens mensuels en litres par seconde au bout de							
			1	2	3	4	5	6	7	8 mois
1889	2239	Juin	2007	1801	1673	1544	1368	1284	-	-
1879	1991	Juin	1860	1617	1633	1435	1405	1387	-	-
1897	1953	Mai	1866	1632	1447	1393	1274	1197	1130	1154
1887	1774	Mai	1687	1589	1503	1358	1251	1207	-	-
1888	1749	Juin	1594	1472	1394	1380	1368	1267	1215	-
1886	1731	Juin	1527	1438	1335	1307	-	-		
1901	1723	Mai	1545	1380	1241	1139	1132	1103	-	-
1902	1690	Juin	1510	1425	1288	1208	1154	1155	-	-
1893	1657	Mai	1427	1306	1252	1124	1085	1023	1010	-
1891	1652	Mai	1600	1500	1456	1313	1180	1115	1116	-
1881	1620	Mai	1532	1362	1312	1217	1074	-	-	-
1878	1598	Mai	1504	1316	1235	1268	1156	-	-	-
1883	1569	Juin	1479	1419	1296	1282	-	-	-	-
1885	1554	Juin	1401	1266	1241	-	-	-	-	-
1892	1533	Mai	1392	1290	1247	1104	1072	-	-	-
1898	1455	Juin	1312	1205	1122	1051	1010	966	-	-
1900	1443	Mai	1333	1162	1127	1099	1003	918	966	930
1884	1420	Mai	1308	1225	1098	1051	1011	958	-	-
1890	1389	Mai	1323	1233	1249	1215	1145	-	-	-
1903	1387	Mai	1312	1156	1148	1120	1072	1041	-	-
1899	1380	Juillet	1315	1152	1102	1045	1013	-	-	-
1880	1308	Juin	1198	1180?	1162	1069	-	-	-	-
1896	1295	Mai	1173	1120	1029	965	-	-	-	-
1894	1286	Mai	1180	1123	1080	978	937	911	909	904
1882	1217	Juin	1037	945	988	986	-	-	-	-
1895	1147	Mai	1072	967	967	860	875	-	-	-

Tableau XXVI

Mois de Décembre 1900 – Lac Majeur (Alt. 197m.)

Dates	Niveau de l'émissaire	Débit sorti du lac	Débit q entré dans le lac (approximativement)	Pluies en mm
4 Décembre 1900	96 cm.	469 m.c.	372 m.c.	,
5 , ,	92	453	356	,
6 , ,	88	438	341	2
7 , ,	84	423	374	1
8 , ,	82	415	318	,
9 , ,	78	400	302	,
10 , ,	74	385	288	,
11 , ,	70	370	272	,
12 , ,	66	355	258	,
13 , ,	62	339	268	,
14 , ,	59	328	207	,
15 , ,	54	310	238	,
16 , ,	51	300	227	,
17 , ,	48	290	217	,
18 , ,	45	280	207	,
19 , ,	42	270	197	,
20 , ,	39	260	187	,
21 , ,	36	250	177	,
22 , ,	33	241	167	,
23 , ,	30	231	158	,
24 , ,	27	222	173	,
25 , ,	25	216	167	,
26 , ,	23	210	186	,
27 , ,	22	207	158	,
28 , ,	20	201	153	,
29 , ,	18	196	123	,
30 , ,	15	188	115	,
31 , ,	12	180	,	15

Tableau XXVII

Marne à la Chaussée

Dates	Cotes après 0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36 jours
Décrues normales de la Saison froide																			
11-25 Mars 96	296	280	269	258	240	205	153	117	98	.	.								
3-15 Janvier 78	278	270	256	216	172	135	.	.	.										
10-22 Décemb. 82	278	270	262	240	205	165	141	.	.										
3-14 Janvier 96	275	260	250	228	170	125	110	.	.										
1-25 Novemb. 85	272	270	264	240	194	150	125	100	90	72	65	50	.	.					
6 Février 1er Mars 86	272	268	238	195	170	146	125	105	95	80	70	63	55	.	.				
15-28 Février 97	270	265	255	240	210	170	135	110	105	.	.								
1-15 Février 75	265	255	240	195	164	131	110	.	.										
7-15 Janvier 75	261	255	224	180	150	.	.												
8-21 Mars 86	260	225	190	155	140	112	95	87	.	.									
5 Mars-30 Avril 93	250	236	192	160	125	105	90	70	60	48	40	28	21	18	15	8	3	0	.
	après 42 j. : −15 ; après 52 j. : −30 ; après 56 j. : −35 ; après 66 j. : −45.																		
10-22 Avril 77	246	220	180	150	130	115	95	.	.										
1er Mars-3 Avril 1900	245	225	195	170	140	125	100	85	68	65	50	45	38	32	28	22	18	13	. .
7-25 Mars 98	243	225	200	161	130	105	80	72	60	45	.	.							
13-25 Janvier 83	240	220	190	160	135	117	100	.	.										
20 Mars-5 Avril 73	240	225	192	170	150	130	118	96	91	.	.								
3-30 Janvier 97	228	222	205	178	155	122	105	85	65	50	45	40	33	25	.	.			
11 Février-9 Mars 99	198	185	148	112	85	65	50	35	20	8	8	5	3	0	.	.			
16 Mars-Avril 94	190	177	140	115	100	80	65	50	42	34	30	20	10	8	3	−5	−6	−8	. .
	après 41 j. : −15																		
20 Janv. 28 Févr. 96	183	165	138	120	100	80	68	50	42	32	28	20	17	10	8	4	3	−2	. .
	après 40 j. : −14																		

T.S.V.P.

Tableau XXVII (Suite) — Marne à la Chaussée

Dates	Cotes après																		
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36 jours
Décrues dans les périodes de froid sérieux																			
16 Déc.bre 92 - 20 Janv. 93	278	270	262	255	215	160	117	85	66	52	40	31	20	25	15	10	-12	.	.
									gl.ces flott.tes										
28 Nov.bre 90 - 15 Janv. 91	268	253	220	162	120	90	70	50	35	21	20	10	8	5	0	-5	glaces flottantes		
							après 38 j. : -20 ; après 43 j. : -36												
20-28 Décembre 91	266	230	165	115	94	.	.												
							glaces flottantes												
26 Janv. - 25 Février 95	265	253	225	170	125	100	82	60	45	38	25	10	10	8	5	5	.	après 41 j. : -10	
25 Nov. - 10 Décemb.re 75	265	255	235	195	160	130	108	90	80	.	.								
22 Janv. - 5 Février 99	258	256	230	180	145	118	95	75	.	.									
16-25 Décembre 74	256	235	178	135	105	.	.												
6-16 Janvier 76	223	208	190	145	120	103	90	.	.										
16 Décemb. 97 - 2 Janv. 98	178	145	105	72	48	30	18	5	.	.									
Décrues de la Saison chaude																			
27 Juillet - 9 Août 79	284	245	190	150	100	86	.	.											
11 Septemb. - 27 Nov. 97	260	240	170	115	85	65	40	30	20	8	0	0	-10	-12	-18	-21	-22	-23	.
							après 50 j. : -43 ; après 73 j. : -55												
9-25 Juillet 99	185	145	92	60	38	22	8	-8	-10	.	.	.							
26 Mai - 18 Juin 99	180	154	112	75	50	35	20	10	5	-5	-14	.	.						
10-20 Août 75	174	125	100	90	62	50	.	.											
1-7 Juillet 86	96	64	47	32	25	.	.												
11 Juillet - 25 Juillet 86	31	18	4	3	-5	-9	-11	-15	.	.									
Décrues pour les 1ères Crues de la Saison froide ou en Avril																			
1-14 Novembre 96	278	266	255	243	205	166	130	109	.	.									
9-22 Décembre 1900	265	255	232	165	112	70	50	.											
17-23 Novembre 95	259	214	142	97	.	.													
21 Nov.bre - 6 Déc.bre 94	75	56	40	30	18	10	0	-5	-10	-12	-15	-18	-25	.	.				
11-22 Avril 78	270	228	182	150	140	"	.												
10-28 Avril 91	264	250	211	158	130	104	72	58	42	30	.	.							

Tableau XXVIII

Saulx à Vitry-le-Brûlé

Dates	Cotes après																	
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34 jours
	Décrues normales de la Saison froide																	
11-25 Mars 96	285	280	260	240	225	210	180	150	136	,	,							
3-14 Janvier 96	274	258	240	220	185	160	146	,	,									
13-28 Février 97	270	258	245	232	222	210	181	160	,	,								
1-25 Novbre 85	267	260	248	238	208	180	150	142	135	115	100	100	95	,	,			
13-31 Décemb. 85	265	252	240	237	210	200	185	170	150	132	,	,	(froids au début, du 9 au 15)					
4-28 Février 86	262	250	232	212	190	176	160	145	135	122	110	100	95	,	,			
10-22 Décemb. 82	250	240	230	222	205	184	171	,	,									
5 Mars-30 Avril 93	240	210	192	170	148	140	135	115	100	90	80	70	65	60	59	57	55	,
							après 43 j. : 29 ; après 56 j. : 20											
1er Mars-3 Avril 1900	240	210	205	180	165	150	140	125	120	110	103	100	90	90	80	72	68	,
7-25 Mars 98	234	221	208	182	165	148	135	120	108	98	,	,						
7-21 Mars 86	230	208	180	165	140	135	124	110	,	,								
12-25 Janvier 83	230	210	195	170	150	142	120	,	,									
18-26 Février 81	225	210	190	170	155	145	,	,										
1-23 Janvier 97	222	208	200	190	180	175	158	150	125	110	100	95	,	,				
11-25 Mars 79	220	205	185	165	150	140	127	113	,	,								
16 Mars-30 Avril 94	210	200	170	150	138	120	110	100	100	85	70	70	64	63	60	56	,	
														après 45 j. : 45				
19 Janv.-28 Fév. 96	195	185	178	160	147	135	120	105	94	91	85	78	76	75	70	62	60	,
														après 39 j. : 44				
15 Déc. 97-2 Janv. 98	186	172	145	130	115	90	80	70	60	54	,	,						
12 Févr.-4 Mars 99	175	160	140	125	112	100	90	80	72	68	60	,	,					

T. S. V. P.

Tableau XXVIII (Suite) – Saulx à Vitry-le-Brûlé

Dates	Cotes après 0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34 jours
Décrues dans les périodes de froids sérieux																		
														rivière gelée				
2 Janv. - 8 Février 80	310	295	270	240	225	205	175	145	130	110	102	96	94	88	88	71	63	60
	crue de débâcle, grand hiver, grands froids en Décembre et Janvier																	
									glces flottes					rivière gelée				
16 Déc. 92 - 20 Janv. 93	273	255	240	225	205	165	130	112	100	80	58	62	55	55	50	45	40	.
	après 45 j. : 25 ; grands froids du 24 Décembre au 20 Janvier																	
20 Janv. - 5 Févr. 99	263	250	240	230	205	182	160	140	125	.	.							
2-16 Janvier 81	260	240	215	211	192	165	150	125	105	.	.							
	glaces flottantes												rivière gelée					
26 Janv. - 25 Févr. 95	258	285	195	170	150	128	110	100	90	85	80	65	55	55	.	grandes gelées		
27 Novbre 90 - 15 Janv. 91	245	230	215	195	164	132	115	105	85	63	57	57	53	50	42	38	.	.
	puis rivière gelée ; après 57 j. : 25																	
18-27 Décemb. 91	242	229	200	165	130	100	.	.	.	.								
Décrues de la Saison chaude																		
10-27 Septemb. 97	260	245	215	180	150	133	110	95	80	73	70	65	60	57	53	45	43	40
	après 42 j. : 30 ; après 50 j. : 18																	
26 Mai - 18 Juin 99	225	218	178	140	125	105	90	84	74	65	60	.	.					
27 Juin - 25 Juill. 86	212	190	165	122	105	90	82	75	66	58	51	50	45	45	40	.	.	
8-25 Juillet 99	196	175	150	130	100	92	80	74	70	.	.	.	.					
Décrues pour les 1ères Crues de la Saison froide																		
1-14 Novemb. 96	275	255	240	225	210	185	150	145	.	.	(petite crue auparavant)							
8-29 Décemb. 1900	273	258	235	208	165	140	132	104	.	.								
15-23 Novemb. 95	238	220	185	145	135	.	.											
21 Nov. - 6 Décemb. 94	120	108	100	88	80	78	71	60	55	52	.	.						

Tableau XXIX — Haute-Seine à Bray

Dates	Cotes après 0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34 jours
Décrues normales de la saison froide																		
17-30 Mars 1896	289	272	254	236	220	198	169	151	142	,	,	crue exceptionnellement rapide						
14 Déc. 85-5 Janv. 86	280	267	258	250	241	228	215	201	,	,								
16 Mars-6 Avril 85	276	267	254	235	221	205	185	162	144	130	119	114	,	,				
15-24 Déc. 82	258	248	238	230	228	218	,	,										
3-29 Mars 93	254	248	240	233	223	211	197	183	164	146	134	122	112	100	,	barrages relevés		
7-29 Janvier 97	246	241	230	222	212	196	177	158	143	130	122	114	,	,				
8-30 Mars 79	p.p. 245	237	235	p.p. 228	223	217	207	200	178	p.p. 169	161	153	,	,	(p.p. petites pluies)			
16-30 Janvier 83	244	240	235	227	213	202	195	191	,	,								
1-27 Mars 1900	243	239	231	220	213	204	190	170	155	146	136	124	116	109	,	,		
27 Mars-6 Avril 73	240	220	208	195	180	162	155	,	,									
14-30 Mars 86	229	224	210	201	184	170	155	150	142	135	,	,						
11-26 Mars 98	213	210	198	180	152	134	118	107	,	,								
2-24 Mars 80	207	200	182	168	155	138	125	117	108	103	95	90	,	,				
24 Févr.-14 Mars 83	186	173	160	150	140	133	127	120	115	111	,	,						
Décrues dans les périodes de froids sérieux																		
1-18 Janvier 81	283	275	260	248	230	217	194	168	155	,	,							
21 Déc. 92-22 Janv. 93	264	250	235	230	212	184	150	130	110	105	100	100	97	85	85	70	69	,
24 Déc. 84-10 Janv. 85	259	238	219	192	165	135	124	,	,									
9 Janv.-2 Février 80	251	248	225	202	158	131	115	102	96	81	78	68	62	,	,			
9 Janv.-24 Janv. 92	245	236	221	212	197	178	151	130	,	,								
1-13 Mars 92	235	226	200	181	159	149	,	,										
29 9bre-15 Déc. 75	232	224	216	200	170	142	122	119	112	,	,							
1-23 Février 95	228	214	200	162	135	108	82	72	72	53	48	42	,	,				
26 Déc. 87-6 Janv. 88	226	214	197	165	140	130	,	,	dégel									
3-13 Février 78	215	205	187	165	147	135	,	,										
14-26 Déc. 78	202	186	172	167	158	140	137	,	,									
Décrues de la saison chaude.																		
5-23 Avril 95	245	237	222	202	173	138	116	100	95	84	,	,	barrages relevés					
14-26 Juil. 99	194	175	150	130	108	95	82	,	,									
12-24 Juin 87	193	187	163	133	123	106	101	,	,									
8-20 Mai 88	185	174	158	145	p.p. 127	124	112	102	92	,	,		(p.p. petites pluies)					
27 Mai-6 Juin 99	176	162	145	125	108	98	,	,										
11-25 Juillet 89	147	135	p.p. 128	118	105	100	90	76	,	,			(p.p. petites pluies)					
Décrues pour les 1ères crues de la saison froide																		
15-24 Décemb. 82	260	258	248	238	230	228	218	,	,									
29 Déc. 84-10 Janv. 85	259	238	219	192	165	135	124	,	,									
5-17 Novembre 81	256	246	228	205	168	137	125	,	,									
24 Déc. 83-19 Janv. 84	242	236	222	210	189	167	146	p.p. 136	129	125	116	110	104	99	,	(p.p. petites pluies)		
25 Janv.-7 Février 99	235	225	212	187	157	132	120	,	,									
26 Déc. 87-6 Janv. 88	226	214	197	165	140	130	,	,	dégel									

Tableau XXX

Ource à Autricourt

Dates	Cotes après								
	0	5	10	15	20	25	30	35	jours
Décrues normales de la saison froide									
11-31 Mars 96	152	115	78	60	40	″	″	″	
12 Mars-5 Avril 85	124	105	70	51	35	30	″	″	
3 Janv. Février 96	123	98	66	58	44	40	35	30	
11-31 Décemb. 85	121	92	65	49	40	″	″	″	
1-20 Avril 95	120	97	62	48	38	″	″	″	
20 Déc. 80-20 Janv. 81	118	90	71	41	35	″	″	″	grands froids
15 Févr. 1er Mars 97	118	92	70	40	″	″	″	″	
17 Déc. 92-10 Janv. 93	115	90	72	40	27	″	″	″	grands froids
10-25 Décemb. 82	115	95	70	46	″	″	″	″	
24 Février-10 Mars 89	112	105	70	57	″	″	″	″	
30 Octob. 15 Nov. 80	108	92	68	45	″	″	″	″	
25 Janv. 28 Févr. 75	105	80	72	54	46	32	24	22	
26 Févr. 18 Mars 93	103	85	70	55	50	40	38	″	
1-25 Mars 79	100	87	80	65	55	″	″	″	
3-22 Janv. 97	95	85	55	45	25	15	″	″	
7-25 Janv. 92	90	75	58	33	″	″	″	″	
1-26 Mars 1900	90	70	60	35	30	25	″	″	
7-25 Mars 1898	75	60	40	30	25	″	″	″	
10-20 Février 94	68	42	28	26	″	″	″	″	
16 Mars-10 Avril 94	65	45	30	25	22	″	″	″	
27 Mars-15 Avril 98	30	25	20	10	10	″	″	″	
Décrue exceptionnelle									
25 Janv. 11 Févr. 95	115	71	45	35	30	″	″	″	Mois de Février exceptionnellement froid.

Tableau XXXI

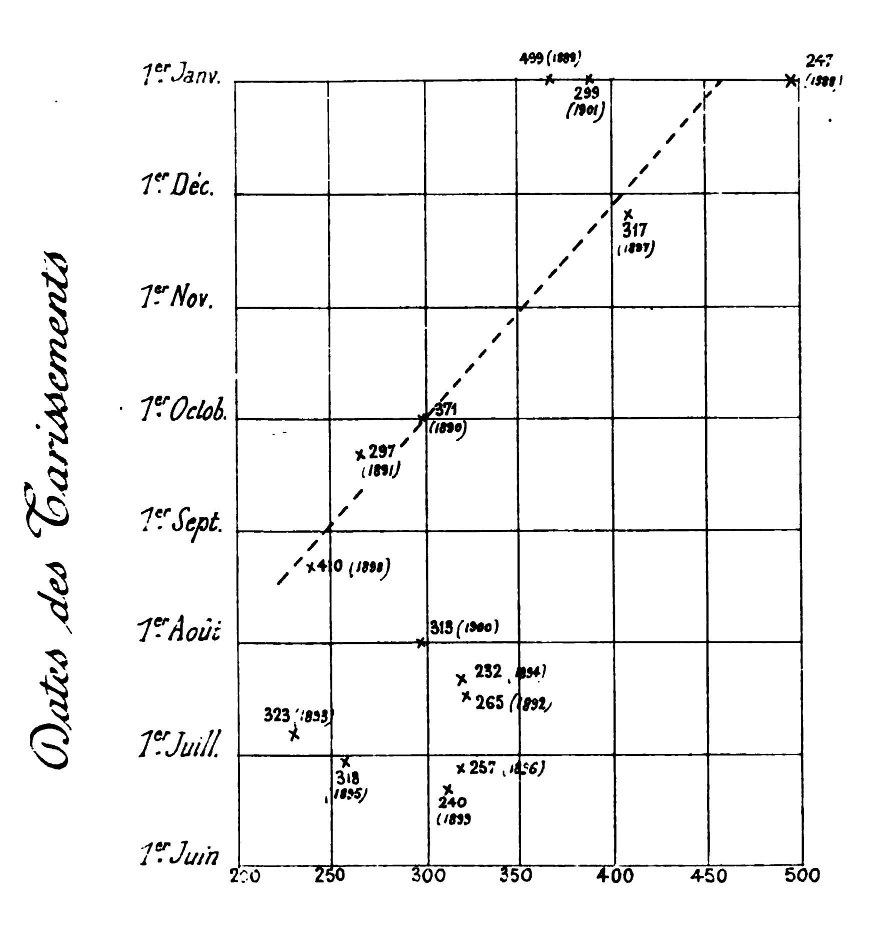
Seine à Paris (Pont d'Austerlitz)

Dates	Cotes après														
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	jours
Décrues normales de la saison froide															
				p.p. crue du Gd Morin											
5-25 Janvier 83	621	555	430	355	347	310	318	290	240	220	200	.	.		(p.p. petites pluies)
								p.	p.						
21 Mars-16 Avril 76	560	485	394	322	290	275	240	227	200	180	150	.	.		
17 Février-3 Mars 97	520	460	400	350	310	270	240	200	.	.					
13-23 Décembre 82	488	412	330	285	260	240	.	.							
				p.	p.										
25 Déc. 72-18 Janv. 73	430	390	320	310	290	300	280	240	210	200	180	165	150	.	.
1-25 Mars 79	425	372	355	320	303	285	270	245	230	213	200	175	160	.	.
28 Mars-5 Avril 77	405	360	300	280	250	.	.								
20-28 Mars 96	370	275	220	200	160	.	.	crue très rapide négligée							
	dégel														
10-28 Février 86	365	332	300	270	232	213	192	147	165	143	.	.			
			crue du Gd Morin												
19 Févr.-3 Mars 81	340	312	300	282	241	230	220	.	.						
7-27 Mars 93	290	270	240	220	210	210	190	180	170	165	140	.	.		
27 Mars-6 Avril 73	270	240	217	195	170	140	"	.							
13 Mars-4 Avril 86	265	245	213	192	182	175	165	155	155	141	135	121	.	.	
Décrues dans les périodes de froids sérieux															
25 Févr.-8 Mars 89	578	505	450	360	290	258	228	.	.						
3-19 Janv. 81	500	450	350	268	250	212	170	150	130	.	.				
13-31 Décemb. 85	470	400	310	271	221	200	182	172	.	.					
11-21 Janv. 80	325	245	190	155	140	110	.	.							
1-15 Mars 92	300	270	205	182	165	165	150	.	.						
11-20 Janvier 87	290	260	212	180	163	142	.	.							

Nota – Certaines de ces décrues doivent être divisées en deux périodes pour la construction du graphique $t = H$

Graphique 1.

Prévision des Dates des Tarissements de la Somme



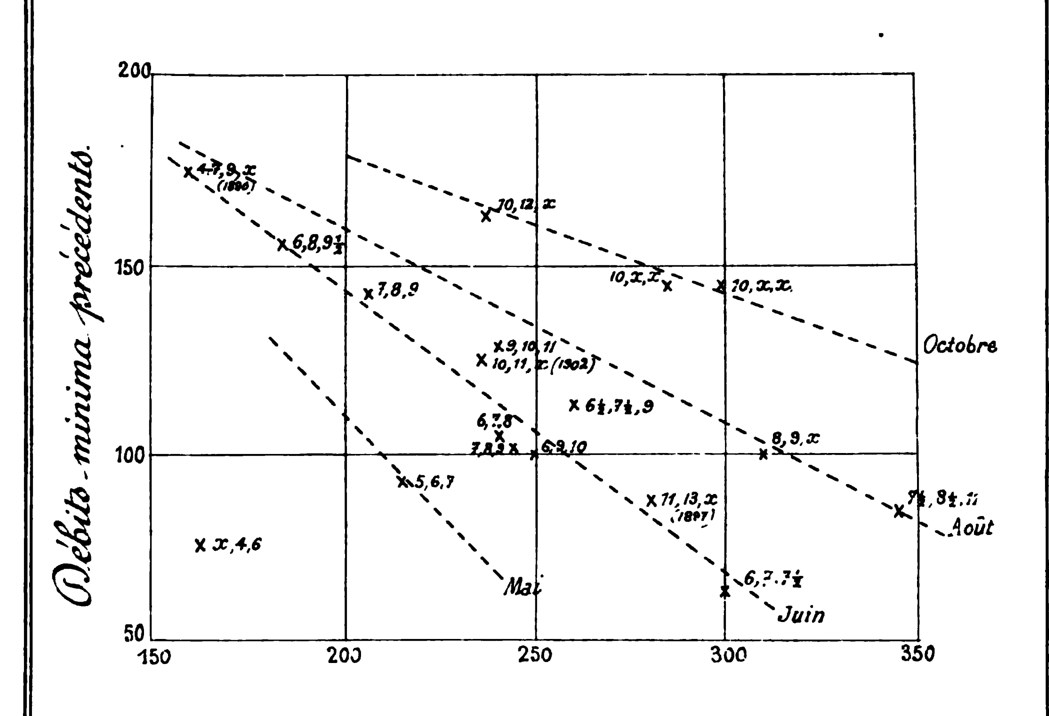
Pluies de la saison froide.

N. — A côté de chaque point sont indiqués l'année correspondante et le chiffre de pluies de la saison froide précédente.

Graphique 2

1er Graphique
donnant les Dates où les Débits
de 160, 140, 120 l.,
sont réalisés par la Source de Cérilly (Vanne)

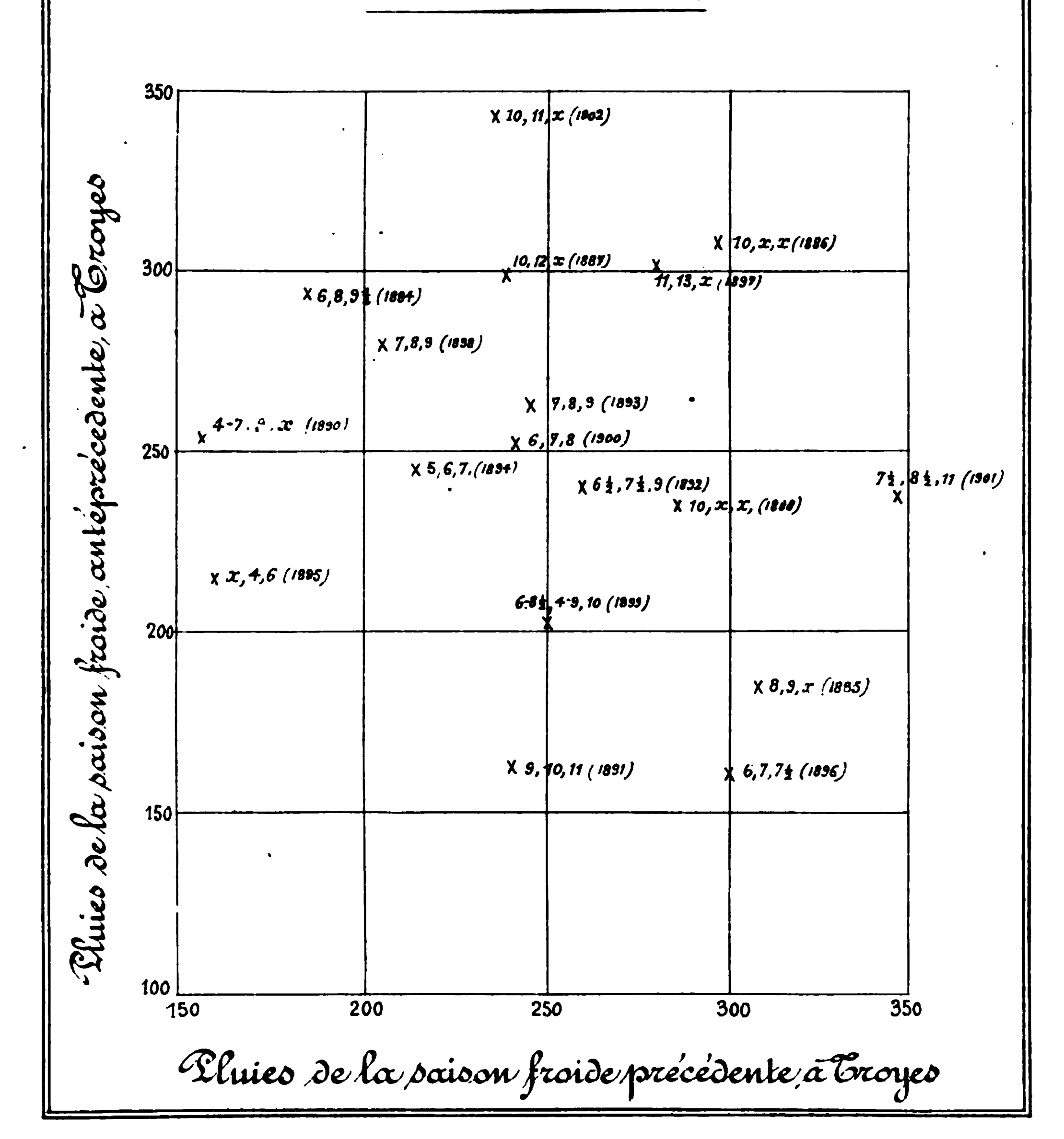
(Les courbes tracées se rapportent au débit 160)

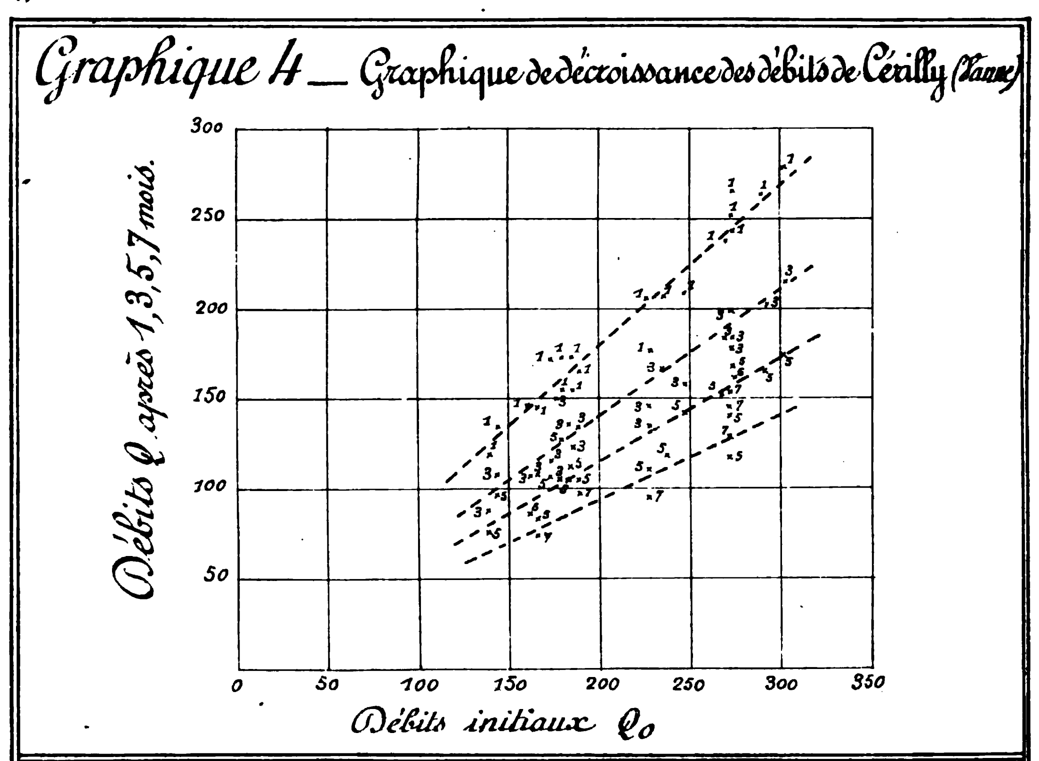


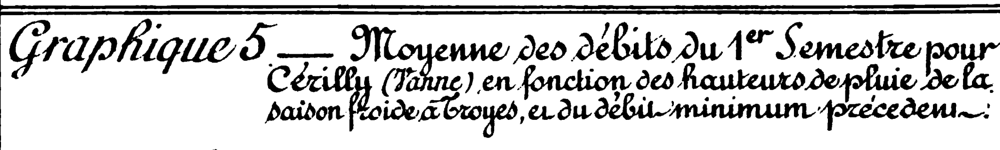
Pluies de la saison froide précédente à Troyes

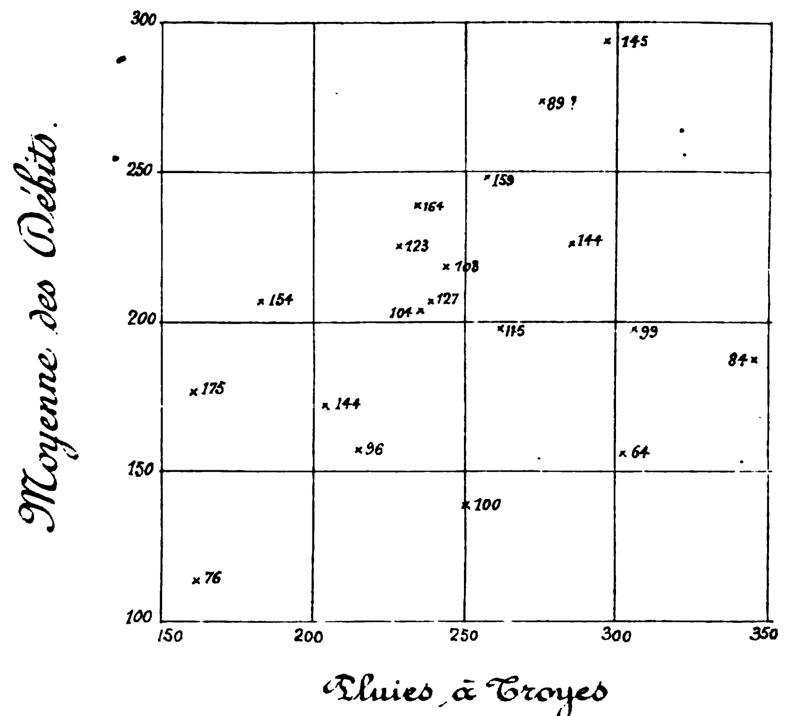
Graphique 3.

2ème Graphique
donnant les Dates des Débits
160, 140, 120 l.,
pour la Source de Cérilly (Vanne)



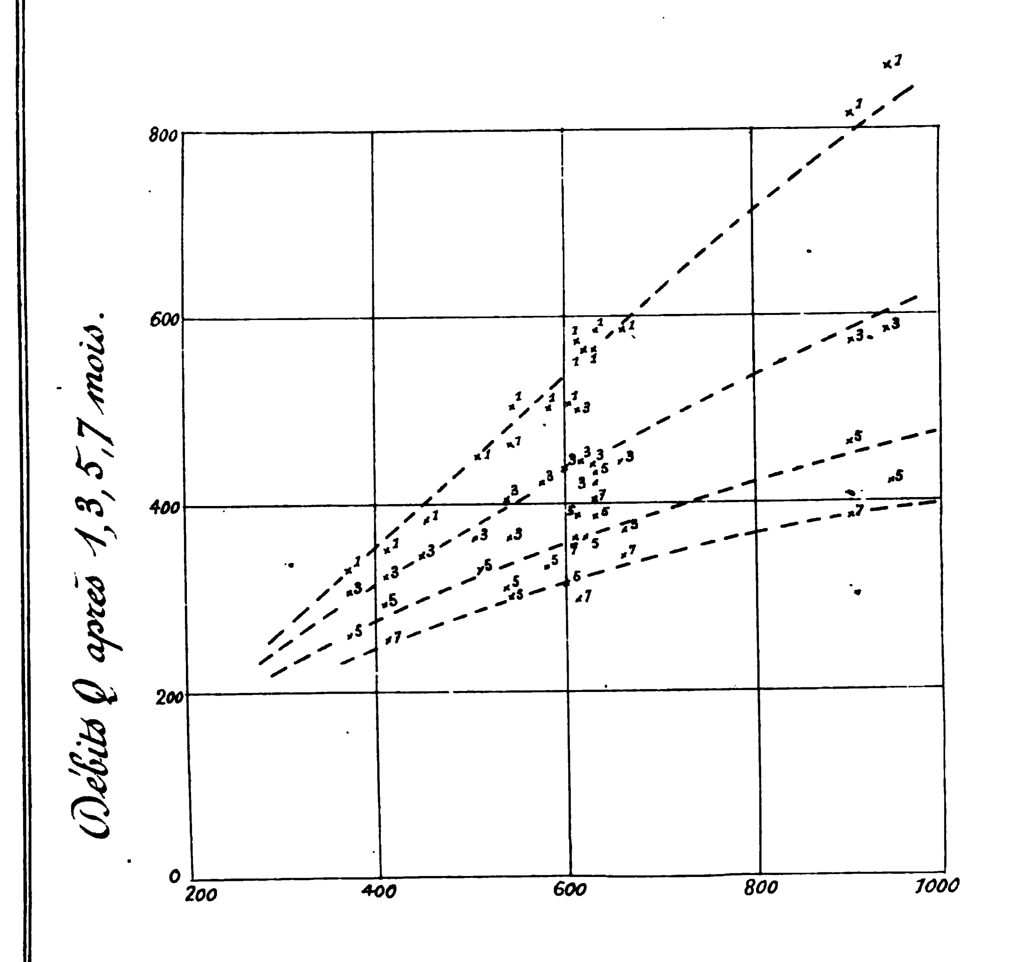

Graphique 4 — Graphique de décroissance des débits de Cérilly (Tanne)
Débits Q après 1, 3, 5, 7 mois.
300
250
200
150
100
50
0
50
100
150
200
250
300
350
Débits initiaux Q₀

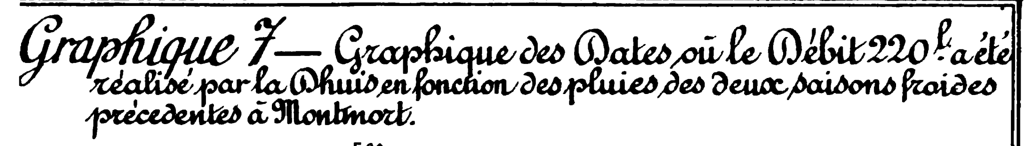

Graphique 5 — Moyenne des débits du 1er Semestre pour Cérilly (Tanne) en fonction des hauteurs de pluie de la saison froide à Troyes, et du débit minimum précédent.


Moyenne des Débits.
300
250
200
150
100
150
200
250
300
350
Pluies à Troyes
145
89 ?
159
164
123
144
108
154
104
127
115
99
84
175
144
96
64
100
76

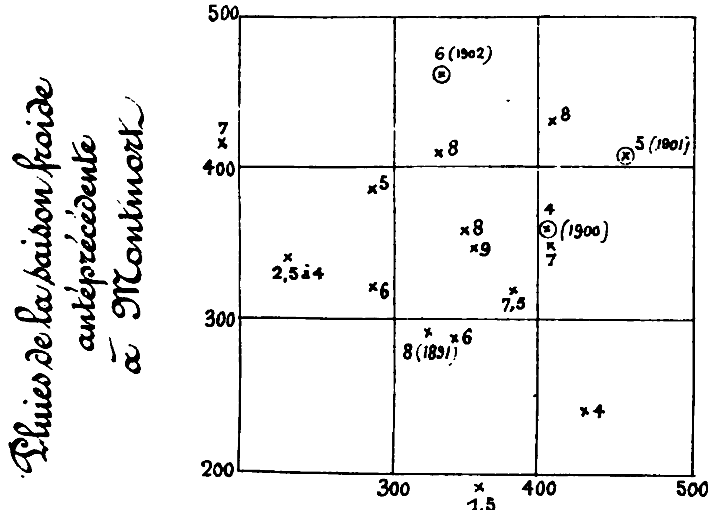
Graphique 6

Graphique de décroissance des Débits d'Armentières





Graphique 7 — Graphique des Dates où le Débit 220 l. a été réalisé par la Dhuis en fonction des pluies des deux saisons froides précédentes à Montmort.



Graphique 8 — Graphique de décroissance des débits des Sources de la Dhuis

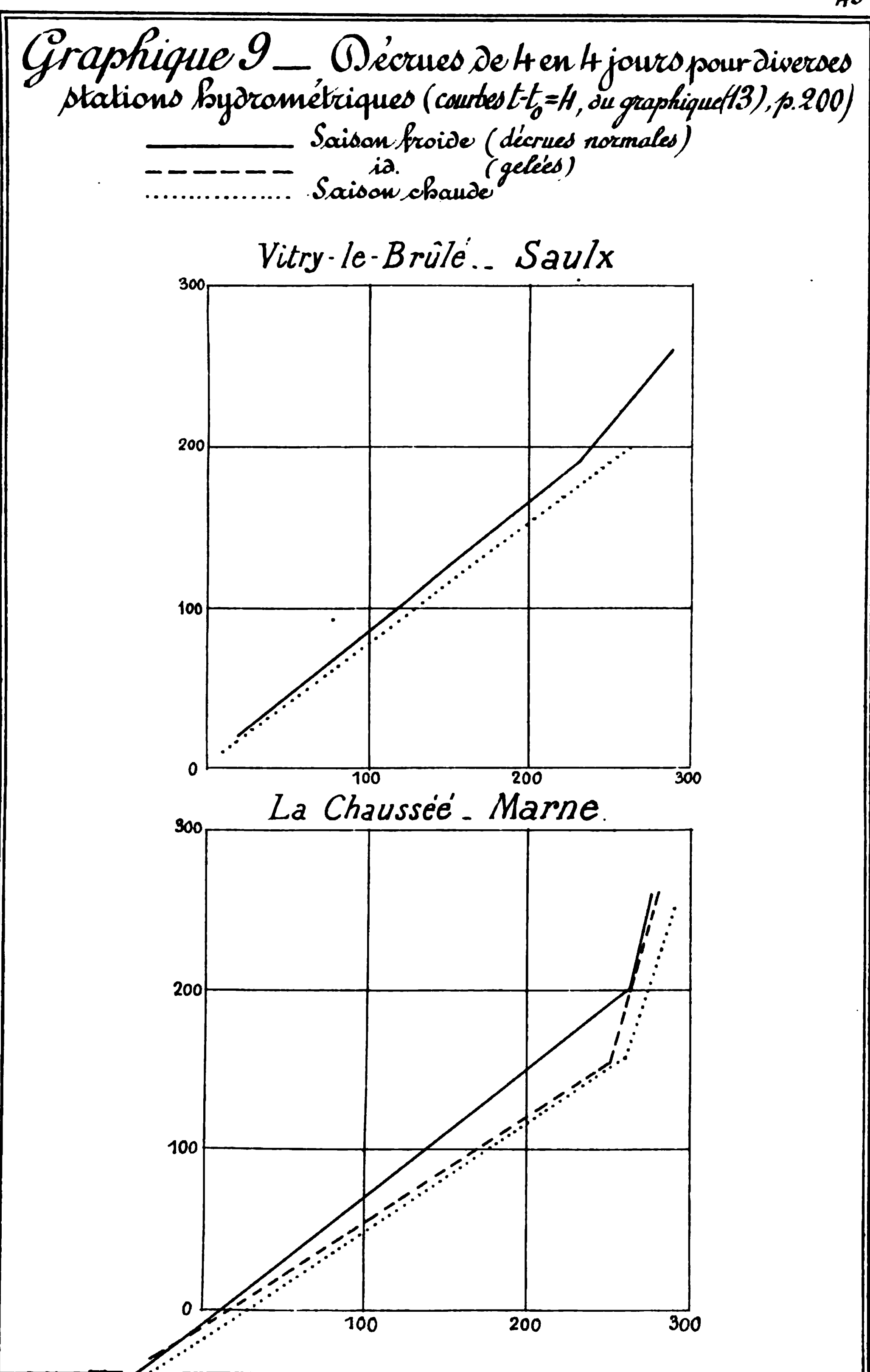
un mois

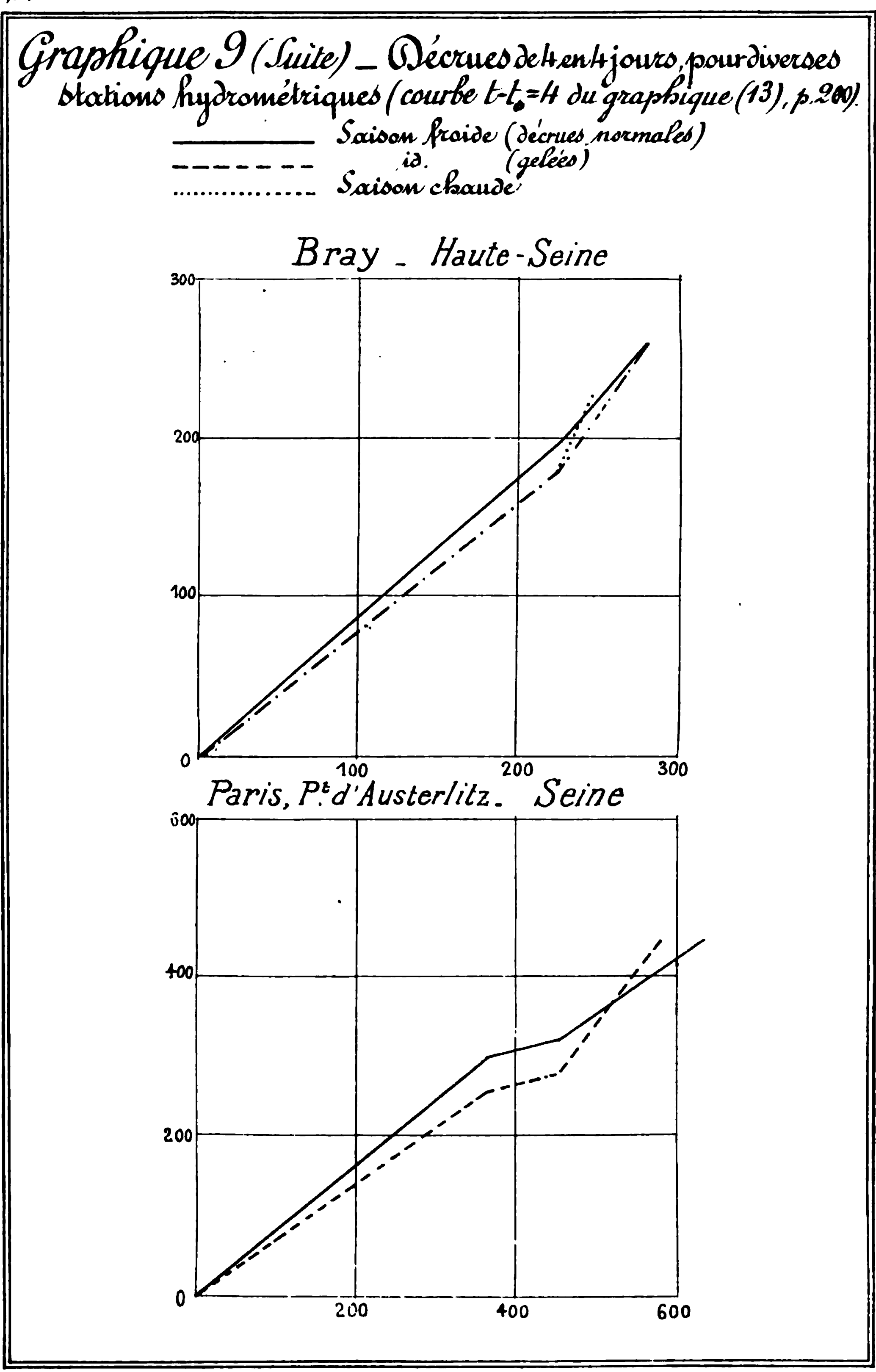
trois mois

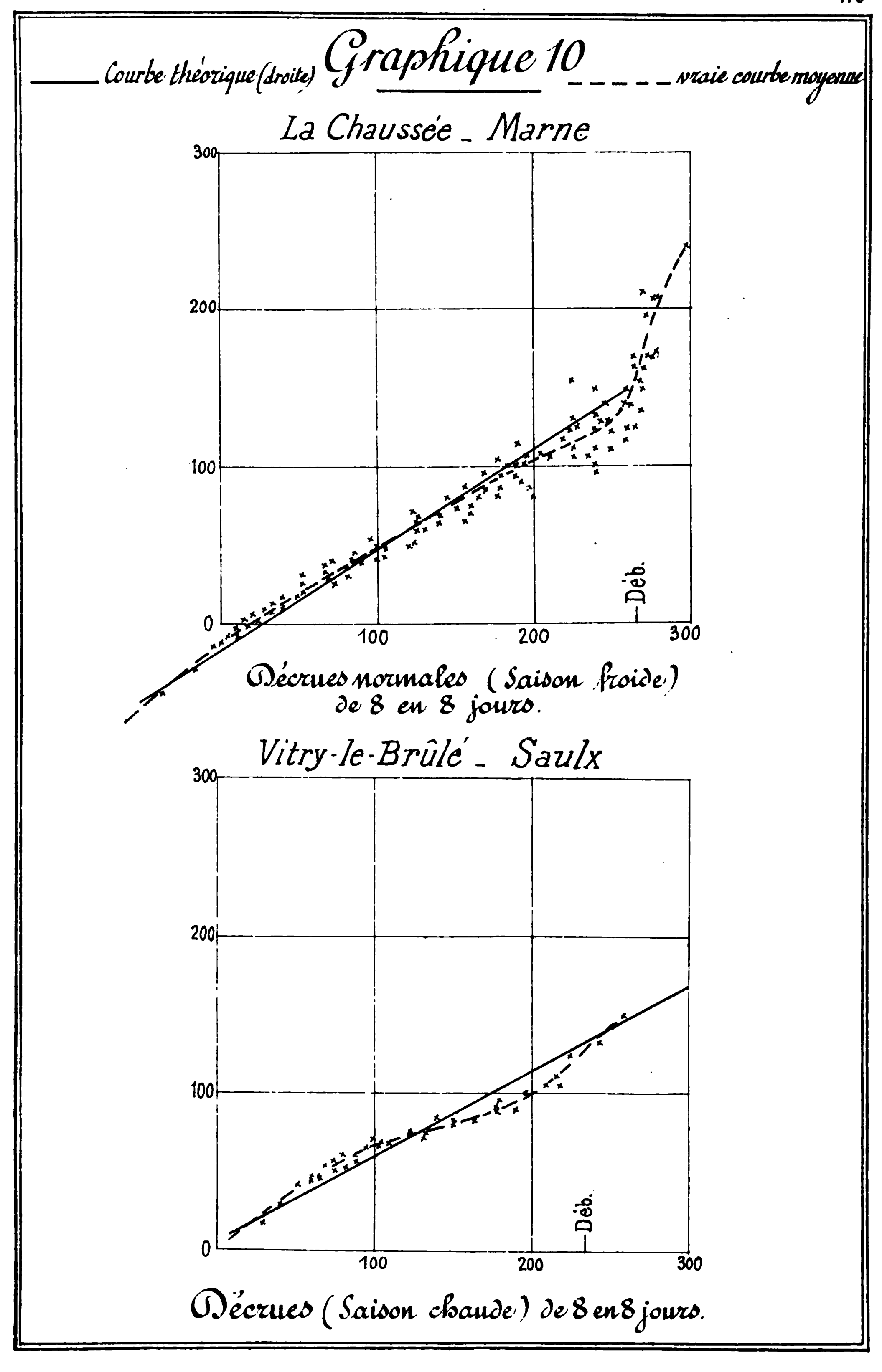
cinq mois

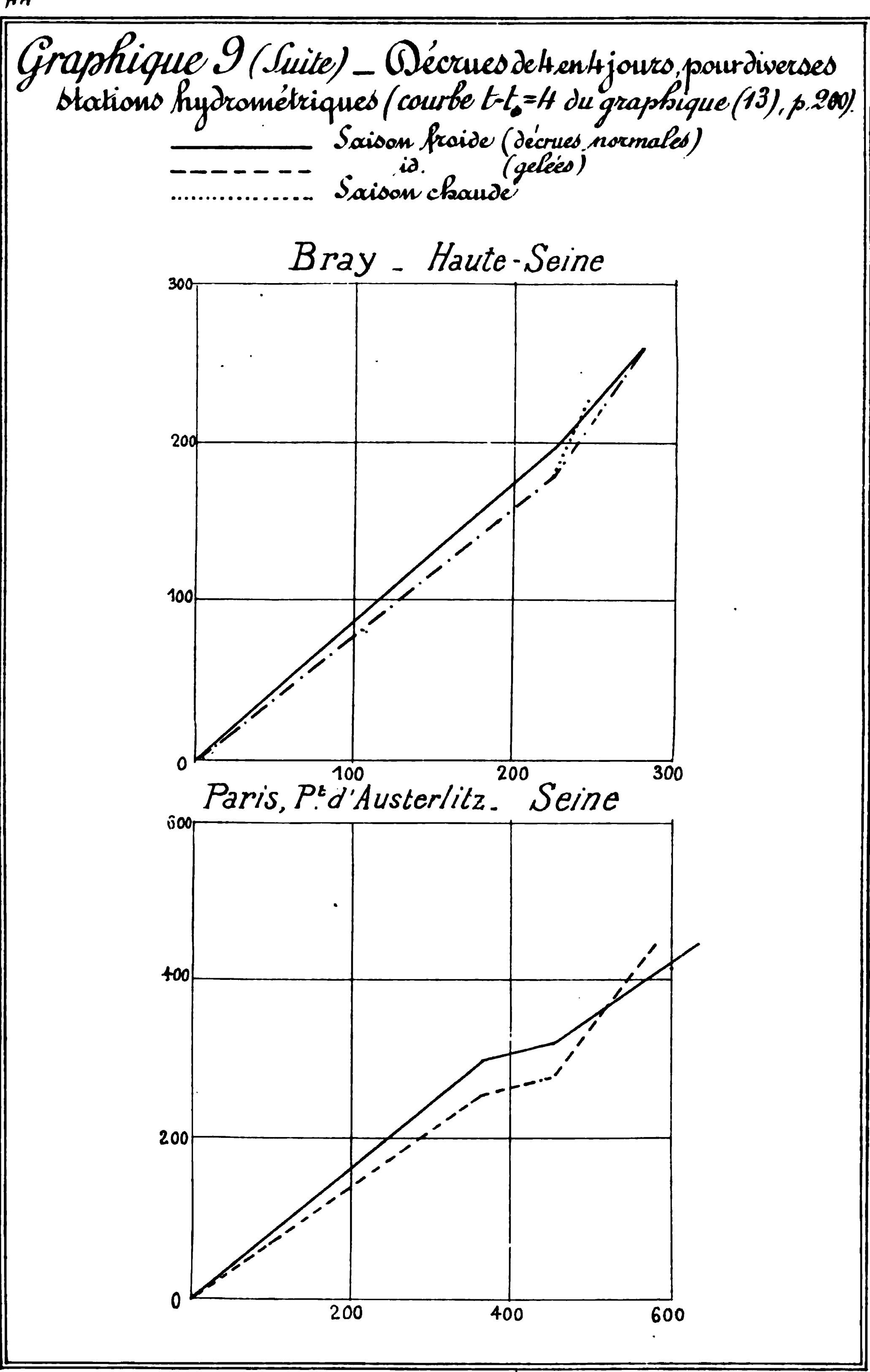
Débits Q, après 1, 3, 5 mois

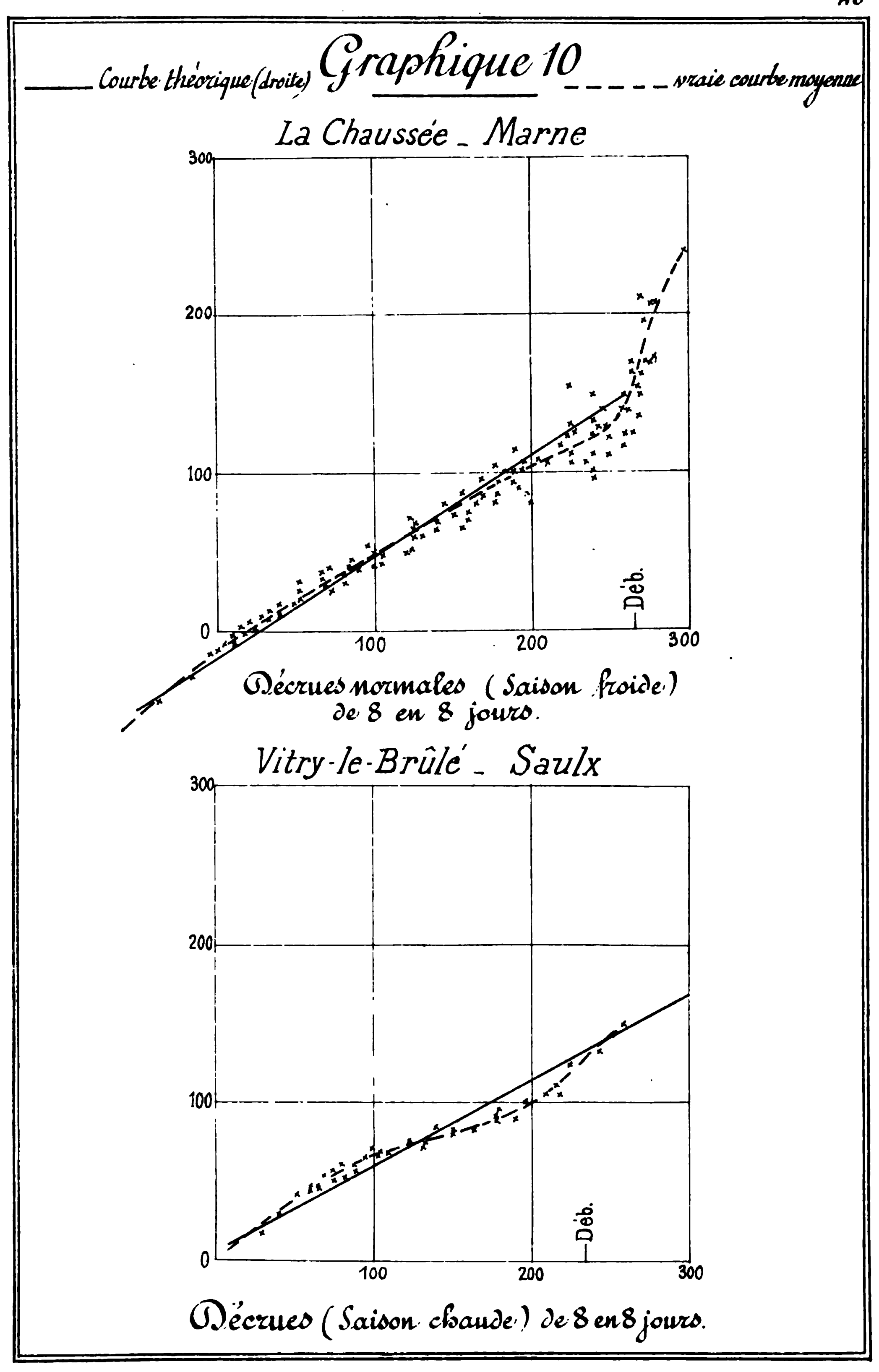
Débits initiaux Q_0


Graphique 9 _ Décrues de 4 en 4 jours pour diverses stations hydrométriques (courbes $t-t_0=4$, du graphique (13), p. 200)
Saison froide (décrues normales)
id. (gelées)
Saison chaude
Vitry-le-Brûlé _ Saulx
300
200
100
0
100
200
300
La Chaussée _ Marne
300
200
100
0
100
200
300

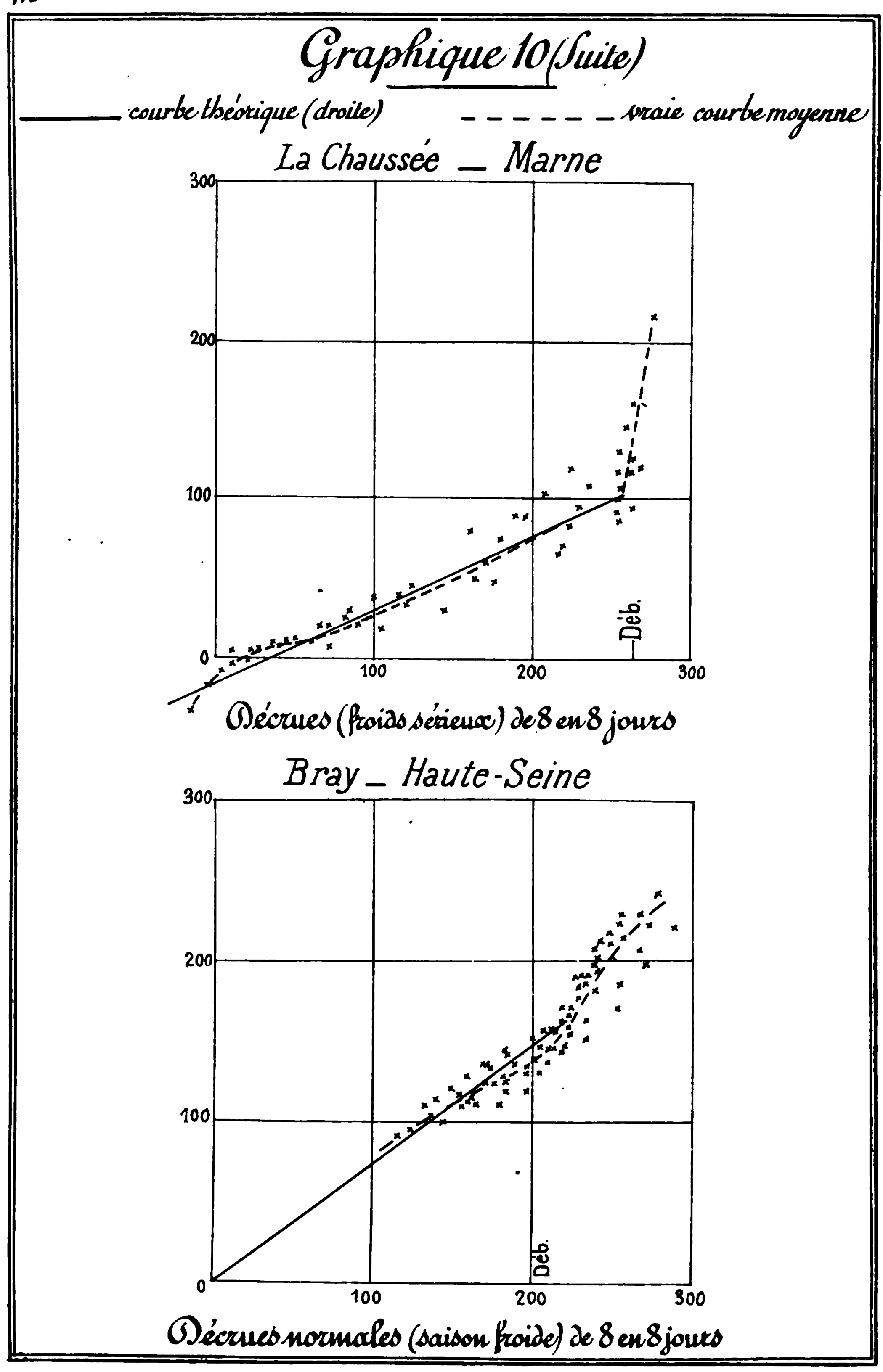

Graphique 9 (Suite) _ Décrues de 4 en 4 jours, pour diverses stations hydrométriques (courbe $t-t_0=4$ du graphique (13), p. 260).
Saison froide (décrues normales)
id. (gelées)
Saison chaude
Bray _ Haute-Seine
300
200
100
0
100
200
300
Paris, P^t d'Austerlitz _ Seine
600
400
200
0
200
400
600

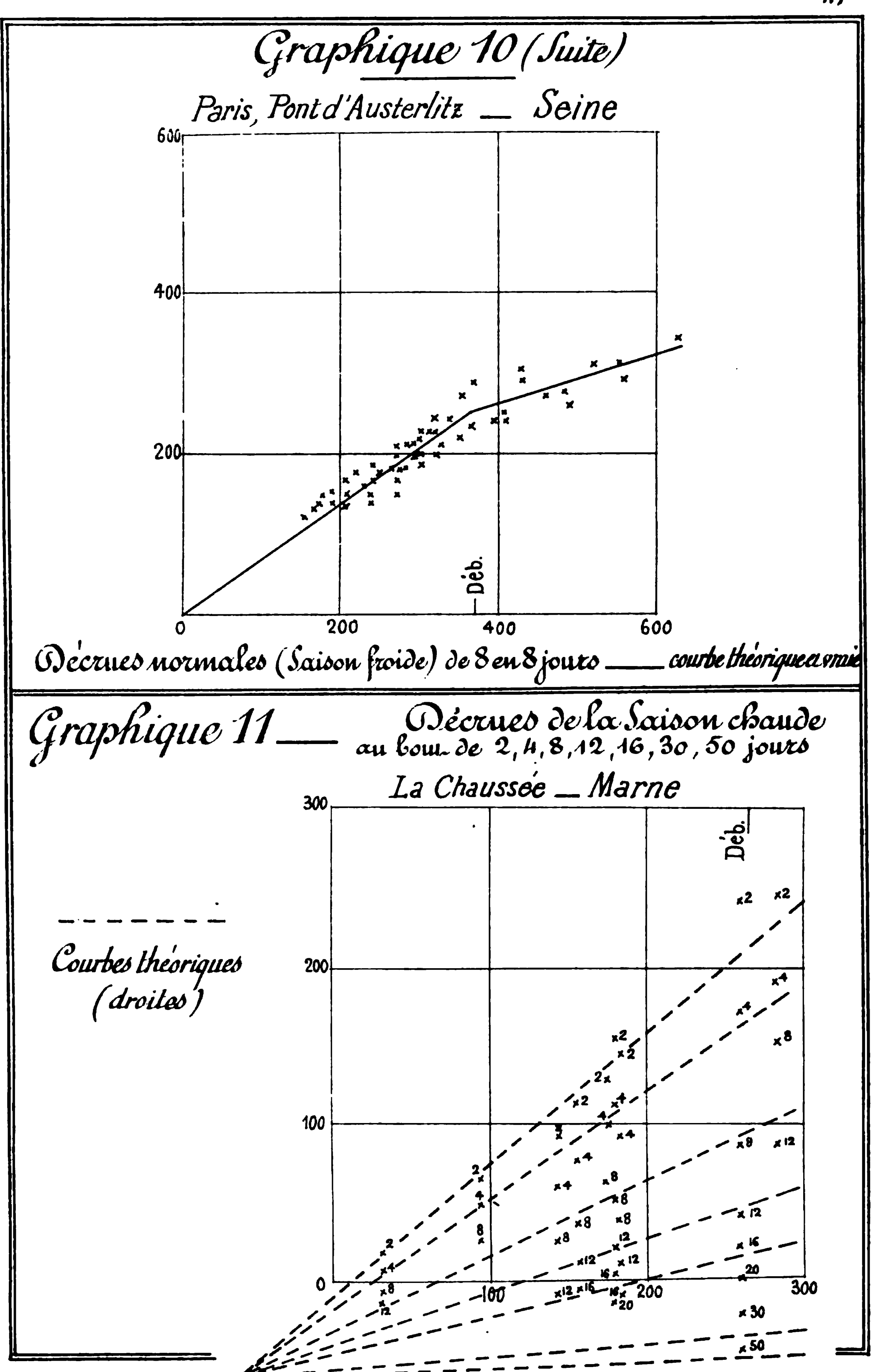

Courbe théorique (droite)
Graphique 10
vraie courbe moyenne
La Chaussée _ Marne
300
200
100
0
100
200
300
Déb.
Décrues normales (Saison froide) de 8 en 8 jours.
Vitry-le-Brûlé _ Saulx
300
200
100
0
100
200
300
Déb.
Décrues (Saison chaude) de 8 en 8 jours.


Graphique 9 (Suite) _ Décrues de 4 en 4 jours, pour diverses stations hydrométriques (courbe t-t₀=4 du graphique (13), p. 200)
Saison froide (décrues normales)
id. (gelées)
Saison chaude
Bray _ Haute-Seine
300
200
100
0
100
200
300
Paris, Pt d'Austerlitz _ Seine
600
400
200
0
200
400
600



Courbe théorique (droite)
Graphique 10
vraie courbe moyenne
La Chaussée _ Marne
300
200
100
0
100
200
300
Déb.
Décrues normales (Saison froide) de 8 en 8 jours.
Vitry-le-Brûlé _ Saulx
300
200
100
0
100
200
300
Déb.
Décrues (Saison chaude) de 8 en 8 jours.


Graphique 10 (Suite)
courbe théorique (droite)
vraie courbe moyenne
La Chaussée _ Marne
300
200
100
0
100
200
300
Déb.
Décrues (froids sérieux) de 8 en 8 jours
Bray _ Haute-Seine
300
200
100
0
100
200
300
Déb.
Décrues normales (saison froide) de 8 en 8 jours

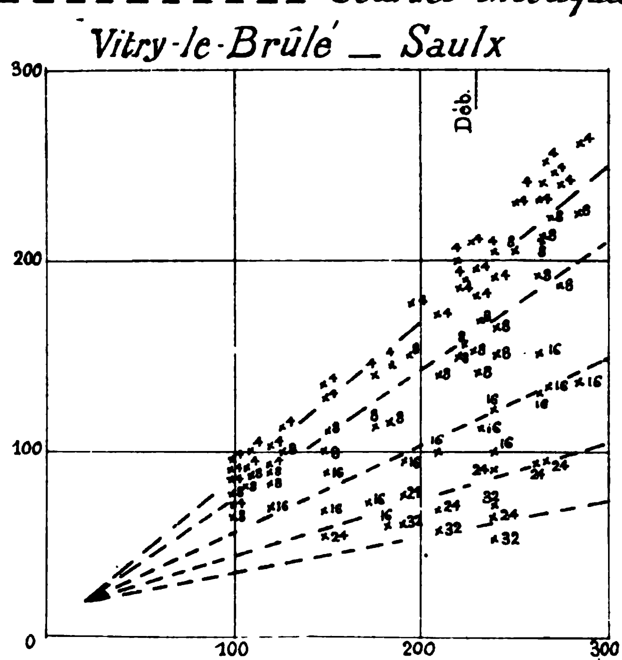


Graphique 10 (Suite)
Paris, Pont d'Austerlitz — Seine
600
400
200
0
200
400
600
Déb.
Décrues normales (Saison froide) de 8 en 8 jours —— courbe théorique à vmie
Graphique 11 —— Décrues de la Saison chaude au bout de 2, 4, 8, 12, 16, 30, 50 jours
La Chaussée — Marne
300
200
100
0
100
200
300
Déb.
Courbes théoriques (droites)

Graphique 11 (Suite)

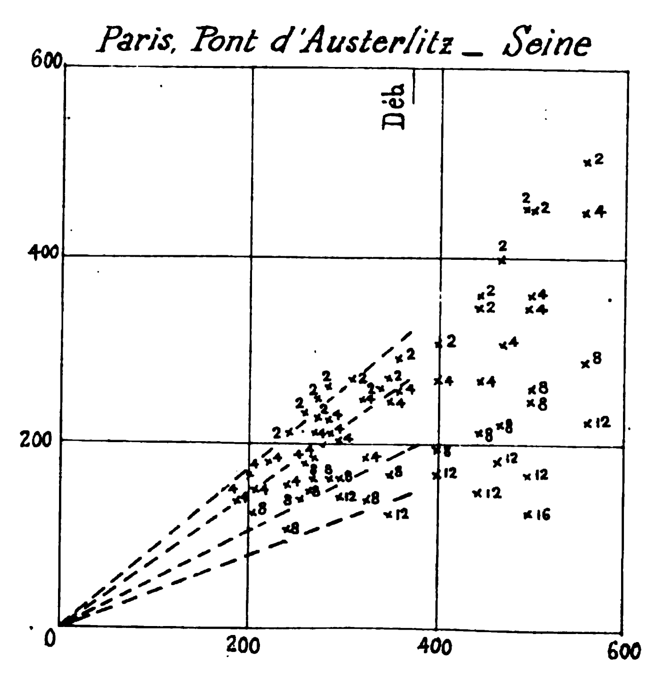
- - - - - - - - - - - - - Courbes théoriques (droites)

Vitry-le-Brûlé _ Saulx



Décrues normales de la Saison froide, au bout de 4, 8, 16, 24, 32 jours

Paris, Pont d'Austerlitz _ Seine



Décrues de la Saison froide (froids sérieux) au bout de 2, 4, 8, 12, 16 jours

A LA MÊME LIBRAIRIE

DUHEM (P.). — Thermodynamique et Chimie. 1902. gr. in-8, 500 p. et fig. . . . . 15 fr. »»

W. W. ROUSE BALL. — Récréations mathématiques des temps anciens et modernes. Ouvrage traduit par **J. FITZ-PATRICK** sur la 3e édition anglaise. (La traduction française a été revue et considérablement augmentée par l'auteur). Un beau vol. grand in-8, 352 pages. Nombreuses figures. 1897. . . . . 5 fr. »»

HADAMARD (J.). — Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. — Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par RIEMANN (Mémoire couronné par l'Académie des Sciences). Grand in-4. 10 fr. »»

LEGENDRE (A. M.). — Théorie des Nombres. 4e édition, conforme à la 3e. 2 vol. in-4 d'environ. 900 pages . . . . 40 fr. »»

CZUBER (Em.). — Probabilités et moyennes géométriques. Ouvrage traduit de l'allemand par le Commandant **H. SCHUERMANS.** 1902 8 fr. 50

BOCCARDI (J.). — Guide du Calculateur (Astronomie, Navigation). 2 vol. grand in-4, 1902, se vendant séparément. Tome I . . . . . 4 fr. »»
Tome II . . . . . 12 fr. »»

LAMÉ. — Examen des méthodes employées pour résoudre les Problèmes de Géométrie. Réimpression fac-similé. 1903. . . . 5 fr. »»

PAINLEVÉ (P.).— Leçons sur la théorie analytique des Équations différentielles. In-4, 558 pages lithographiées. 1897 . . . . 20 fr. »»

KŒNIGS (G.), — Leçons de Cinématique théorique, avec notes de MM. DARBOUX et COSSERAT. Grand in-8, 500 pages. 1897. . 15 fr. »»

GOURSAT (E.). — Leçons sur l'intégration des Equations aux dérivées partielles du second ordre. 2 vol. grand in-8, 1896-98 18 fr. »»

GREEN (George). — Mathematical Papers, published by FERRERS. Nouvelle édition conforme à la précédente... 1903 . . . . . 20 fr. »»

VAN'T HOFF (J. H.). — La Chimie Physique et ses applications. Huit conférences faites à Chicago à l'occasion du Centenaire de la fondation de l'Université; traduites par **J. CORVISY.** 1903 . . . . 3 fr. 50

MACH (Ernst).— La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Ouvrage traduit sur la 4e édition allemande par Em. BERTRAND avec introduction de M. Émile PICARD, membre de l'Institut. 1904, gr. in-8, 500 pp. et fig . . . . 15 fr. »»

DASSEN (J). Professeur à l'Université de Buenos-Ayres. — **Etudes sur les Quantités mathématiques. — Grandeurs dirigées, Quaternions.** gr. in-8. 1903 . . . . 5 fr. »»

HADAMARD (J.). — Leçons professées au Collège de France sur la propagations des ondes et les équations de l'hydrodynamique. gr. in-8, 400 pages, figures. 1904. . . . . 18 fr. »»

BRILLOUIN (M.). — Propagation de l'Electricité. Histoire et Théorie. 1904, gr. in-8 de 398 pages avec figures (cours du Collège de France) . . . . 15 fr. »»

TANNERY (J.). — Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable. Tome I. 1904 . . . . 14 fr. »»

KŒNIGS (G.). — Introduction à une Théorie nouvelle des mécanismes. 1904. . . . . 3 fr. »»

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE BUSSIÈRE

